

Geometria Diferencial

2014/2015

Licenciatura em Matemática

João Caramalho Domingues

Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

A Geometria Diferencial consiste essencialmente na utilização de ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral para o estudo de objectos geométricos. Naturalmente, estas ferramentas são mais directamente úteis para o estudo de objectos *suaves* (suficientemente suaves para terem tangentes, pelo menos) do que, digamos, para o estudo de triângulos¹ (ou outros objectos *pontiagudos*).

Aqui vamos concentrar-nos no estudo de curvas e superfícies regulares (o adjectivo “regular” é precisamente uma maneira de dizer “suficientemente suave”).

1 Curvas

1.0 Continuidade e derivação de funções vectoriais

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}$ e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou $n = 3$. Vamos escrever

$$F(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{ou} \quad F(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

(consoante $n = 2$ ou $n = 3$, respectivamente), de forma que x , y ou x , y , z são funções $U \rightarrow \mathbb{R}$; a estas duas ou três funções reais chamaremos as *componentes* da função F .

Recordamos que F é contínua num ponto $t_0 \in U$ se e só se todas as suas componentes são contínuas em t_0 . Além disso, F é diferenciável em t_0 se e só se todas as suas componentes são diferenciáveis em t_0 . A matriz jacobiana de F é uma matriz $n \times 1$, que podemos identificar com um vector. Assim, dizemos que o vector

$$F'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \quad \text{ou} \quad F'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

é a *derivada* de F em t_0 . Se $V \subseteq U$ for o conjunto dos pontos onde F é diferenciável, a derivada de F é uma função $V \rightarrow \mathbb{R}^n$. F é *de classe* C^k se todas as

¹Um triângulo só não tem tangentes em três pontos, mas o leitor entenderá por que tem pouco interesse estudar as tangentes do triângulo...

suas componentes forem de classe C^k (no sentido habitual para funções reais de uma variável real).

Esta derivada goza de várias propriedades análogas às das derivadas de funções reais de uma variável real, e que podem ser obtidas facilmente a partir destas. Assim, por exemplo, é válida a Regra da Cadeia na seguinte forma: se $U, V \subseteq \mathbb{R}$ e considerarmos funções $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : V \rightarrow U$ deriváveis, então

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t)$$

(onde \cdot representa, naturalmente, a multiplicação de um vector por um escalar). Também são válidas as seguintes regras de derivação dos produtos interno e externo: se $U \subseteq \mathbb{R}$ e tivermos funções $F, G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ deriváveis,

$$(F \cdot G)'(t) = F'(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot G'(t);$$

e, no caso de $n = 3$,

$$(F \times G)'(t) = F'(t) \times G(t) + F(t) \times G'(t)$$

(estas regras dos produtos podem ser verificadas usando a definição de derivada — de maneira análoga à da regra do produto usual em \mathbb{R} — ou por “força bruta” — desenvolvendo o produto à esquerda e a seguir derivando e aplicando a regra do produto em \mathbb{R}).

1.1 Definições iniciais

Definição 1.1. Uma *parametrização de curva* em \mathbb{R}^n é uma função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ , onde I é um intervalo de \mathbb{R} .

À variável $t \in I$ de uma parametrização $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ chamaremos *parâmetro*.

Exemplo 1.1. Dados um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ e um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ não nulo, a função

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto P + t \mathbf{v} \end{aligned}$$

é de classe C^∞ ($\rho'(t) = \mathbf{v}$; $\rho^{(n)}(t) = \mathbf{0}$, para $n > 1$) e portanto é uma parametrização de curva; a sua imagem é a recta $P + \langle \mathbf{v} \rangle$ (isto é, a recta que incide em P e tem vector director \mathbf{v}).

Exemplo 1.2. A função

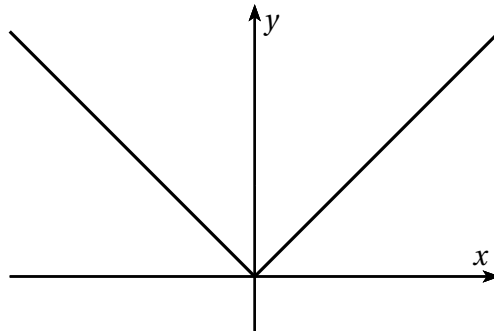
$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

é de classe C^∞ e portanto é uma parametrização de curva; a sua imagem é a circunferência $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Exemplo 1.3. A função

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, |t|) \end{aligned}$$

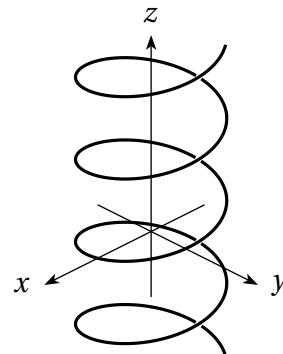
não tem derivada em $t = 0$ e portanto não é (segundo a nossa definição) uma parametrização de curva; a sua imagem é constituída por duas semi-rectas ortogonais, ambas com origem em $(0, 0)$.



Exemplo 1.4. A função

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t, \frac{t}{5}) \end{aligned}$$

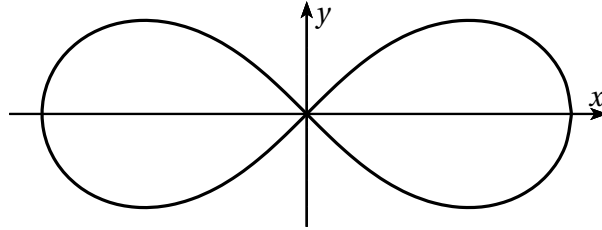
é de classe C^∞ e portanto é uma parametrização de curva; a sua imagem é uma hélice circular.



Exemplo 1.5. A função

$$\begin{aligned} \lambda : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right) \end{aligned}$$

é também de classe C^∞ e portanto é uma parametrização de curva; a sua imagem é uma lemniscata de Bernoulli.²



A definição de parametrização que adoptámos exige que esta seja C^∞ . Nalguns livros exige-se apenas que seja contínua; mais frequentemente, que seja derivável em todos os pontos — isto porque queremos determinar rectas tangentes às curvas parametrizadas; mas como queremos também calcular curvaturas, necessitaremos de segundas derivadas; e como queremos calcular torções, necessitaremos de terceiras derivadas. Para simplificar, consideramos parametrizações com derivadas de todas as ordens, mas o leitor deve reparar que cada resultado exige menos do que isso.

No entanto, para garantir a existência de uma recta tangente em cada ponto, a derivabilidade não chega. É necessária uma outra condição, chamada regularidade:

Definição 1.2. Uma parametrização $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se *regular* se $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$, para todo o $t \in I$.

As parametrizações dos exemplos 1.1, 1.2, 1.4 e 1.5 são regulares ($\rho'(t) = \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$; $\|\gamma_1'(t)\| = 1$ e portanto $\gamma_1'(t) \neq \mathbf{0}$; que $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ e $\lambda'(t) \neq \mathbf{0}$, fica como exercício).

²A equação geral das *lemniscatas de Bernoulli* (num referencial apropriado) é $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$; nesta lemniscata em particular temos $a = 1$. As lemniscatas de Bernoulli foram introduzidas por Jacob Bernoulli em 1694, e definem-se pela conjunção das seguintes propriedades: o produto das distâncias de cada ponto P da lemniscata a dois pontos (chamados focos) F_1, F_2 é constante; a lemniscata passa pelo ponto médio entre F_1 e F_2 .

No que se segue, vamos limitar-nos a parametrizações regulares. Assim, ainda que em geral não apareça o adjetivo “regular”, subentendê-lo-emos.

Uma parametrização de curva pode ser entendida como representando o movimento de uma partícula que percorre um certo caminho (a imagem da parametrização) ao longo de um período de tempo representado por t . Por vezes, chama-se *velocidade* de uma parametrização $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ em $t = t_0$ à derivada $\gamma'(t_0)$, se esta existir. Mas aqui a velocidade não nos interessa muito e a derivada servirá para estudar outras propriedades.

Parametrizações distintas podem ter a mesma imagem. Por exemplo, a circunferência \mathbb{S}^1 é imagem não só da parametrização γ_1 do exemplo 1.2, mas também de

$$\begin{array}{ccc} \gamma_2 : [0, \pi[& \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos 2t, \sin 2t) \end{array} \quad \text{e de} \quad \begin{array}{ccc} \gamma_3 : [0, 2\pi[& \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\sin t, \cos t) \end{array}$$

(e, naturalmente, duma infinidade de outras funções). A única diferença entre γ_1 e γ_2 é precisamente que γ_2 percorre \mathbb{S}^1 com “o dobro da velocidade”: por exemplo, para o ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \gamma_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \gamma_2\left(\frac{\pi}{8}\right)$, temos $\gamma_1'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\gamma_2'\left(\frac{\pi}{8}\right) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Queremos “esquecer” esta diferença.

Definição 1.3. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de curva. Uma *mudança* (ou *transformação*) *de parâmetro* de α é uma bijecção $\mu : J \rightarrow I$, onde J é também um intervalo de \mathbb{R} , tal que tanto μ como $\mu^{-1} : I \rightarrow J$ são de classe C^∞ .³

Nestas condições, a função $\beta = \alpha \circ \mu : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se uma *reparametrização* de α .

Há algumas observações importantes a fazer sobre esta definição:

1. a derivada de uma mudança de parâmetro μ nunca se anula, já que $(\mu^{-1})'(\mu(t)) \cdot \mu'(t) = (\mu^{-1} \circ \mu)'(t) = 1$;
2. uma reparametrização $\beta = \alpha \circ \mu$ de uma parametrização regular α é também uma parametrização regular (é C^∞ por ser a composta de duas funções C^∞ e $\beta'(t) = \alpha'(\mu(t)) \cdot \mu'(t) \neq \mathbf{0}$);

³Por outras palavras, μ é um difeomorfismo C^∞ .

3. uma parametrização e qualquer sua reparametrização têm a mesma imagem ($\beta(J) = \alpha(\mu(J)) = \alpha(I)$);
4. se β é uma reparametrização de α , com $\beta = \alpha \circ \mu$, e se $u_0 = \mu(t_0)$, então $\beta'(t_0) = \alpha'(u_0) \cdot \mu'(t_0)$ — e portanto os vectores $\beta'(t_0)$ e $\alpha'(u_0)$ são colineares;
5. a relação “é uma reparametrização de” é uma relação de equivalência no conjunto das parametrizações de curva em \mathbb{R}^n (a demonstração deste facto fica como exercício).

Esta última observação permite-nos introduzir a seguinte definição de curva:

Definição 1.4. Uma *curva (regular)* em \mathbb{R}^n é uma classe de equivalência de parametrizações regulares relativamente à relação “ser reparametrização”.

(Embora esta seja uma definição de “curva regular”, omitiremos em geral o adjectivo “regular”, tal como no caso das parametrizações.)

As parametrizações γ_1 do exemplo 1.2 e γ_2 da página anterior são reparametrização uma da outra: $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \mu$, com $\mu : [0, \pi[\rightarrow [0, 2\pi[$, onde $\mu(t) = 2t$. Assim, γ_1 e γ_2 definem, ou parametrizam, a mesma curva.

Apresentaremos cada curva como a *curva parametrizada* por alguma das suas parametrizações. Cada *ponto da curva* será dado por um valor do parâmetro dessa parametrização; é claro que se $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu$ for uma reparametrização de γ , t o parâmetro de γ e u o parâmetro de $\tilde{\gamma}$, o ponto $t = t_0$ será o mesmo que o ponto $u = \mu^{-1}(t_0)$.

Na maior parte das situações que veremos a seguir estaremos interessados em propriedades de curvas, isto é, propriedades que são comuns a todas as parametrizações de uma mesma curva — ou ainda, propriedades que se mantêm de uma parametrização para uma reparametrização; dizemos que são propriedades *invariantes por reparametrização*.

No entanto há situações em que é necessário distinguir se uma parametrização e uma sua reparametrização percorrem a sua imagem comum com o mesmo sentido ou com sentidos opostos. Repare que se $\beta = \alpha \circ \mu$ é uma reparametrização de α , como μ' é contínua, definida num intervalo e nunca se

anula, pelo Teorema do Valor Intermédio terá de ser sempre $\mu' > 0$ ou sempre $\mu' < 0$.

Definição 1.5. Dadas uma parametrização $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma sua reparametrização $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, dizemos que α e β têm a mesma orientação se $\mu' > 0$; e dizemos que α e β têm orientações opostas, ou contrárias, se $\mu' < 0$.

Analogamente ao que foi dito acima, a relação “é uma reparametrização com a mesma orientação” é uma relação de equivalência no conjunto das parametrizações de curva em \mathbb{R}^n (exercício...).

Definição 1.6. Uma *curva (regular) orientada* em \mathbb{R}^n é uma classe de equivalência de parametrizações regulares relativamente à relação “ser reparametrização com a mesma orientação”.

Na prática, consideramos uma curva orientada quando tomamos apenas parametrizações com a mesma orientação.

Ainda quanto às observações relativas à definição 1.3, a observação 3. acima permite introduzir a seguinte definição:

Definição 1.7. Dada uma curva, a imagem de uma qualquer das suas parametrizações chama-se *traço* dessa curva.

Infelizmente, existem curvas distintas com o mesmo traço — ou, o que é equivalente, existem parametrizações com a mesma imagem que não são reparametrização uma da outra. Por exemplo, γ_1 do exemplo 1.2 e γ_3 da página 5 (se $\mu : [0, 2\pi[\rightarrow [0, 2\pi[$ for uma mudança de parâmetro, tem de ser $\mu(0) = 0$, já que 0 é o único ponto do intervalo $[0, 2\pi[$ que não é interior; mas $\gamma_1(0) \neq \gamma_3(0)$).

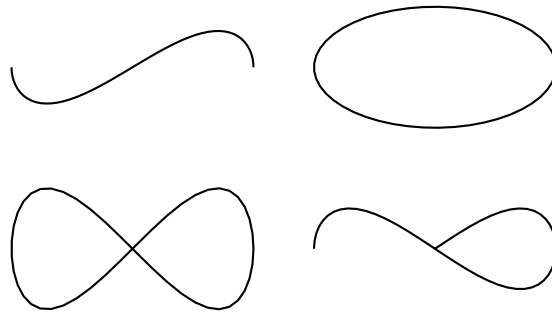
Isto mostra que uma curva não fica completamente determinada pelo seu traço — uma curva não é simplesmente um conjunto de pontos. Uma curva orientada pode ser entendida como um traço percorrido com uma certa ordem. Uma curva não orientada pode ser entendida como um traço percorrido com uma certa ordem ou com a ordem inversa dessa — mas com nenhuma outra ordem; por exemplo, o ponto inicial, se existir, pode passar a ponto final, mas não pode deixar de ser um extremo do percurso.

No entanto, há um certo tipo de traço que corresponde a uma única curva:

Proposição 1.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular injectiva, com $I = [a, b]$, para alguns $a, b \in \mathbb{R}$. Se $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ for outra parametrização regular com a mesma imagem, então $\tilde{\gamma}$ será uma reparametrização de γ .*

A demonstração deste resultado será dada em apêndice.

As condições desta proposição garantem que γ é um homeomorfismo e portanto que a sua imagem é homeomorfa a um intervalo fechado de \mathbb{R} . Intuitivamente, isto significa que essa imagem resulta de tomar um intervalo fechado de \mathbb{R} e “dobrá-lo” sem auto-intersecções — ou seja, sem se cruzar e sem que os extremos do intervalo toquem um no outro ou no interior do intervalo. Dos quatro traços de curvas representados na figura seguinte, apenas o primeiro é homeomorfo a um intervalo de \mathbb{R} (e, na verdade, corresponde a uma única curva, enquanto cada um dos outros é traço de mais do que uma curva).



Mas podemos ainda aplicar a proposição 1.1 se estivermos a estudar aspectos locais e evitarmos pontos de auto-intersecção. Basta tomar uma vizinhança compacta desse ponto, suficientemente pequena para que a sua intersecção com o traço de curva que queremos estudar seja homeomorfo a um intervalo fechado de \mathbb{R} — ou, dito de outra forma, basta restringir as parametrizações a intervalos fechados onde sejam injectivas. Por exemplo, se quisermos estudar algum aspecto *local* (recta tangente, curvatura,...) de \mathbb{S}^1 no ponto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \gamma_1\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \gamma_3\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, podemos considerar as seguintes restrições de γ_1 e γ_3

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1|_{\left[\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right]} : & \left[\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto (\cos t, \sin t) \end{array}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_3|_{[\frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}]} : \left[\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\sin t, \cos t) \end{aligned}$$

que são reparametrização uma da outra ($\mu : [\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}] \rightarrow [\frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}]$, com $\mu(t) = \frac{5\pi}{2} - t$). Na prática, isto significa que *perto de* $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ é indiferente usar γ_1 ou γ_3 (ou qualquer outra parametrização cuja imagem seja \mathbb{S}^1 ou algum arco de \mathbb{S}^1 que contenha $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$).

1.2 Tangentes

Consideremos a curva parametrizada por $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um ponto $\gamma(t_0)$ do traço dessa curva. Se tomarmos um outro ponto $\gamma(t)$ do mesmo traço, a recta que passa em $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t)$, e que é uma secante desse traço, tem como vector director $\gamma(t) - \gamma(t_0)$ — ou qualquer múltiplo não nulo deste, em particular $\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$. Se t tender para t_0 (e portanto $\gamma(t)$ tender para $\gamma(t_0)$), $\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$ terá um limite, por γ ser derivável, e esse limite será não nulo, por γ ser regular; esse limite, que é $\gamma'(t_0)$, será um vector director da tangente ao traço da curva em $\gamma(t_0)$. Esta observação motiva a seguinte definição.

Definição 1.8. A *recta tangente* à curva parametrizada por $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ em $t = t_0$ é a recta $\gamma(t_0) + \langle \gamma'(t_0) \rangle$.

A observação 4 da página 6 mostra que as rectas tangentes são invariantes por reparametrização e portanto que esta definição está bem formulada.

Exemplo 1.6. Considere a parametrização λ do exemplo 1.5, cuja imagem é uma lemniscata. Tem-se

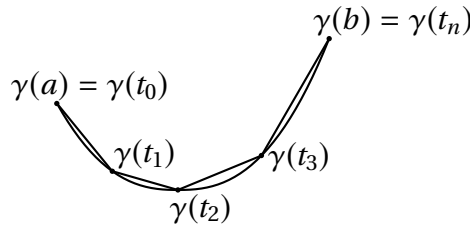
$$\begin{aligned} \lambda' : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{-\sin t (2 + \cos^2 t)}{(1 + \sin^2 t)^2}, \frac{\cos(2t) (1 + \sin^2 t) - \frac{1}{2} \sin^2(2t)}{(1 + \sin^2 t)^2} \right); \end{aligned}$$

note que $\lambda'(t) \neq \mathbf{0}$, para todo o $t \in [0, 2\pi[$, e portanto λ é regular. Como $\lambda(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)$ e $\lambda'(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, a recta $(0, 0) + \langle (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \rangle$, ou seja, a recta de equação $y = x$, é a tangente à curva parametrizada por λ em $t = \frac{\pi}{2}$; como

$\lambda(\frac{3\pi}{2}) = (0, 0)$ e $\lambda'(\frac{3\pi}{2}) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, a recta $(0, 0) + \langle (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \rangle$, ou seja, a recta de equação $y = -x$, é a tangente à curva parametrizada por λ em $t = \frac{3\pi}{2}$. Repare que ambas estas rectas são tangentes ao traço da curva, ou seja à lemniscata, no ponto $(0, 0)$.

1.3 Comprimento de arco

Consideremos a curva parametrizada por $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, e suponhamos que queremos determinar o comprimento do traço da curva entre $t = a$ e $t = b$ ($a < b$, $a, b \in I$).⁴ Devido à facilidade em calcular comprimentos de segmentos de recta, é natural começarmos por tentar aproximar este comprimento por uma sequência de segmentos de recta: dividamos o intervalo $[a, b]$ em subintervalos $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$, com $t_0 = a$ e $t_n = b$ (estamos a supor que $t_0 < t_1 < \dots < t_n$); o comprimento de cada um dos segmentos de



recta que queremos considerar é $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$, e portanto a aproximação que queríamos é

$$\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|;$$

mas $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| (t_i - t_{i-1})$, e portanto podemos escrever essa aproximação como

$$\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| (t_i - t_{i-1});$$

⁴Repare que este comprimento não está à partida definido. Sabemos (ou julgamos saber) do que falamos apenas porque temos uma ideia intuitiva do que significa comprimento, mas não é óbvio que essa ideia intuitiva corresponda a algo que existe sempre (nem é verdade que existe sempre, se alargarmos a definição de parametrização a funções contínuas, não necessariamente diferenciáveis).

ora, se formos subdividindo esta partição de $[a, b]$ em subintervalos, fazendo $(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$ e portanto $n \rightarrow +\infty$ (mas sempre com $t_0 = a$ e $t_n = b$), este somatório tenderá para

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Esta discussão não pretende ser uma *demonstração* de algum resultado, mas somente uma motivação para a seguinte definição:

Definição 1.9. Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de curva, $a, b \in I$ e $a < b$. O *comprimento* da curva parametrizada por γ entre $t = a$ e $t = b$, ou *comprimento do arco* entre $t = a$ e $t = b$ da curva parametrizada por γ , é

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Esta definição está bem formulada, pois o comprimento assim definido é invariante por reparametrização: suponhamos que $\beta = \alpha \circ \mu$ é uma reparametrização de α , v_0, v_1 dois valores do parâmetro v de β , com $v_0 < v_1$, $u_0 = \mu(v_0)$ e $u_1 = \mu(v_1)$; já vimos que μ' é sempre positiva ou sempre negativa — no primeiro caso $u_0 < u_1$ e no segundo $u_1 < u_0$; se for então $\mu' > 0$, o comprimento da curva entre $u = u_0$ e $u = u_1$ é

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u_1} \|\alpha'(u)\| du &= \int_{v_0}^{v_1} \|\alpha'(\mu(v))\| \mu'(v) dv = \\ &= \int_{v_0}^{v_1} \|\alpha'(\mu(v)) \cdot \mu'(v)\| dv = \int_{v_0}^{v_1} \|\beta'(v)\| dv; \end{aligned}$$

e se for $\mu' < 0$, devemos calcular o comprimento entre $u = u_1$ e $u = u_0$, que é

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_0} \|\alpha'(u)\| du &= \int_{v_1}^{v_0} \|\alpha'(\mu(v))\| \mu'(v) dv = - \int_{v_1}^{v_0} \|\alpha'(\mu(v))\| \cdot |\mu'(v)| dv = \\ &= \int_{v_0}^{v_1} \|\alpha'(\mu(v)) \cdot \mu'(v)\| dv = \int_{v_0}^{v_1} \|\beta'(v)\| dv. \end{aligned}$$

Exemplo 1.7. Considere a parametrização γ do exemplo 1.4. O comprimento da curva parametrizada por γ entre $t = 0$ e $t = 2\pi$ (trata-se de uma “volta” da

hélice, entre os pontos $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, \frac{2\pi}{5})$ é

$$\int_0^{2\pi} \left\| \left(-\sin t, \cos t, \frac{1}{5} \right) \right\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{5^2}} dt = \frac{2\sqrt{26}}{5} \pi.$$

Bastante mais importante para o que se segue é a próxima definição, muito semelhante à anterior, mas com algumas diferenças a notar:

Definição 1.10. Dados uma parametrização $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um valor $t_0 \in I$, a *função comprimento de arco com origem em $t = t_0$* é

$$\begin{aligned} s : I &\rightarrow s(I) \subseteq \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du \end{aligned}$$

Repare que:

1. Se $t > t_0$, então $s(t) > 0$ e $s(t)$ corresponde efectivamente ao comprimento da curva parametrizada por γ entre t_0 e t .
2. Se $t < t_0$, então $s(t) < 0$ e o comprimento da curva parametrizada por γ entre t e t_0 é $-s(t)$.
3. A função s é de classe C^∞ ($s'(t) = \|\gamma'(t)\|$), a função norma é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\gamma'(t) \neq 0$ por γ ser regular, e γ' é C^∞ .
4. A derivada de s nunca se anula ($s'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0$, por γ ser regular).
5. Como s é uma função real, definida num intervalo, com derivada que nunca se anula, é injectiva; e portanto é uma bijecção sobre a sua imagem.

Tomemos a inversa $s^{-1} : s(I) \rightarrow I$ de s ; por 3. e 4. acima e pelo Teorema da Função Inversa, s^{-1} é C^∞ em cada ponto de $s(I)$. Assim, $s^{-1} : s(I) \rightarrow I$ é uma mudança de parâmetro e

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$$

é uma reparametrização de γ .

Normalmente usa-se a letra s para representar o parâmetro de $\tilde{\gamma}$, o que é natural: $s = s(t)$.

Esta reparametrização tem propriedades muito interessantes, que veremos mais adiante, e que são consequência do seguinte facto:

Proposição 1.2. *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização, $s : I \rightarrow s(I) \subseteq \mathbb{R}$ uma função comprimento de arco de γ e $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$. Então $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$, para todo o $s \in s(I)$.*

Demonstração. Basta ver que, sendo $\gamma(t) = \tilde{\gamma} \circ s(t)$, pela Regra da Cadeia

$$\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(s) \cdot s'(t) = \tilde{\gamma}'(s) \cdot \|\gamma'(t)\|$$

e portanto

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = \left\| \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\| = 1. \quad \square$$

Esta propriedade de o vector derivada ser sempre unitário merece uma designação especial: se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma parametrização com a propriedade de $\|\gamma'(s)\| = 1$, para todo o $s \in I$, o seu parâmetro s não é necessariamente uma função comprimento de arco tal como definida acima, mas apenas porque pode não ter uma origem — isto é, pode nunca acontecer $s = 0$ (ou dito ainda de outra forma, não há garantia de que $0 \in I$); no entanto, se tomarmos dois valores $s_0, s_1 \in I$, $s_0 < s_1$, acontece necessariamente que o comprimento da curva parametrizada por γ entre $s = s_0$ e $s = s_1$ é

$$\int_{s_0}^{s_1} 1 \, ds = s_1 - s_0.$$

Assim, justifica-se a seguinte terminologia:

Definição 1.11. Uma parametrização $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se uma *parametrização por comprimento de arco* se $\|\gamma'(s)\| = 1$, para todo o $s \in I$.

Se, além disso, γ é uma reparametrização de α , então é uma *reparametrização de α por comprimento de arco*.⁵

⁵Mesmo que não possa ser obtida a partir de α usando uma função comprimento de arco, ou porque $0 \notin I$ ou porque γ e α têm orientações opostas (repare que as derivadas de s e s^{-1} são positivas).

Na prática, uma reparametrização por comprimento de arco pode ser muito difícil de calcular, ou mesmo impossível de escrever em termos de funções elementares (é o caso de uma parametrização cuja imagem seja uma elipse). No entanto, para efeitos teóricos, podemos sempre tomar uma reparametrização por comprimento de arco. Vamos ver um exemplo da utilidade disto no início da próxima secção.

Para terminar esta secção, vamos ver que quaisquer duas reparametrizações por comprimento de arco da mesma parametrização são muito parecidas:

Proposição 1.3. *Sejam γ e $\tilde{\gamma}$ duas parametrizações por comprimento de arco, uma reparametrização da outra, com $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \mu$. Então $\mu(t) = \pm t + c$ (onde c é uma constante).*

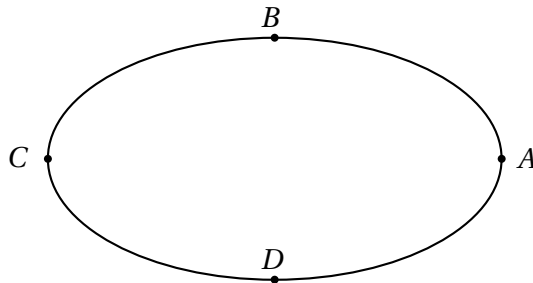
Demonstração. Pela Regra da Cadeia,

$$\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(\mu(t)) \cdot \mu'(t);$$

mas, como $\|\gamma'(t)\| = \|\tilde{\gamma}'(\mu(t))\| = 1$, vem que $|\mu'(t)| = 1$, isto é, $\mu'(t) = \pm 1$; integrando, temos $\mu(t) = \pm t + c$. \square

1.4 Curvatura

Queremos medir a curvatura de uma curva num ponto. Intuitivamente, uma recta tem curvatura nula em todos os pontos, a curvatura de uma circunferência é também igual em todos os pontos e tanto menor quanto maior for o raio e, na seguinte elipse, a curvatura é máxima em A e C e mínima em B e D .



A ideia que vamos seguir para concretizar esta noção intuitiva é a seguinte: a curvatura deve medir a variação na direcção da tangente — se na vizinhança de um ponto a tangente varia muito, então a curvatura é grande; se varia pouco, então a curvatura é pequena. Isto sugere que para calcular a curvatura devemos usar uma derivada. Como a derivada de uma parametrização nos dá um vector director da tangente, podemos pensar em usar a segunda derivada duma parametrização; mas o vector (primeira) derivada de uma parametrização pode variar não só em direcção mas também em norma, o que afectará a sua derivada. A solução consiste em derivar, não uma parametrização arbitrária, mas uma reparametrização por comprimento de arco. Assim, a primeira derivada, sendo sempre unitária, não varia em norma.

Definição 1.12. Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de curva e $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu$ uma sua reparametrização por comprimento de arco. Sejam ainda $t_0 \in I$ e $s_0 = \mu^{-1}(t_0)$. A *curvatura* da curva parametrizada por γ em $t = t_0 \in I$ é

$$\kappa(t_0) = \left\| \frac{d^2 \tilde{\gamma}}{ds^2}(s_0) \right\|.$$

Temos de verificar duas coisas para confirmar que esta definição está bem formulada:

1. Se $\hat{\gamma}$ for uma outra reparametrização por comprimento de arco de γ , a curvatura resultante é a mesma. De facto, já vimos (na prop. 1.3) que nesse caso, com $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma} \circ \nu$, se tem $\nu' = 1$ ou $\nu' = -1$; vamos chamar r ao parâmetro de $\hat{\gamma}$ e s ao de $\tilde{\gamma}$, de forma que $s = \nu(r)$; então, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d\hat{\gamma}}{dr} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d\nu}{dr}$$

e

$$\frac{d^2 \hat{\gamma}}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d\nu}{dr} \right) = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d^2 \nu}{dr^2} + \frac{d^2 \tilde{\gamma}}{ds^2} \cdot \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + 0 = \frac{d^2 \tilde{\gamma}}{ds^2}$$

e portanto a curvatura é igual, calculada usando $\hat{\gamma}$ ou $\tilde{\gamma}$.

2. Além disso, se α for uma parametrização de γ , e $\tilde{\alpha}$ uma reparametrização de α por comprimento de arco, então $\tilde{\alpha}$ é também uma reparametrização

trização de γ por comprimento de arco — e portanto a curvatura obtida através de $\tilde{\alpha}$ será ainda igual à obtida através de $\tilde{\gamma}$.

Exemplo 1.8. Considere uma circunferência de centro na origem e raio a , parametrizada por

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (a \cos t, a \sin t) \end{aligned}.$$

A função comprimento de arco de γ , com origem em $t = 0$, é

$$\begin{aligned} s : [0, 2\pi[&\rightarrow [0, 2a\pi[\\ t &\mapsto at \end{aligned},$$

pois $\|\gamma'(t)\| = \|(-a \sin t, a \cos t)\| = a$ e portanto $\int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t a du = at$. Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : [0, \frac{2\pi}{a}[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto (a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a}) \end{aligned}$$

é uma reparametrização de γ por comprimento de arco; a segunda derivada de $\tilde{\gamma}$ em cada ponto $t = \frac{s}{a}$ é

$$\frac{d^2 \tilde{\gamma}}{ds^2} = \frac{d(-\sin \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a})}{ds} = \left(-\frac{\cos \frac{s}{a}}{a}, -\frac{\sin \frac{s}{a}}{a} \right) = \left(-\frac{\cos t}{a}, -\frac{\sin t}{a} \right)$$

e a curvatura é

$$\kappa(t) = \left\| \left(-\frac{\cos t}{a}, -\frac{\sin t}{a} \right) \right\| = \frac{1}{a}$$

— ou seja, é constante e igual ao inverso do raio da circunferência.

Exemplo 1.9. Uma curva tem curvatura constante nula se e só se o seu traço está contido numa recta. (exercício)

Já foi referido que pode não ser praticável determinar explicitamente uma parametrização por comprimento de arco de uma dada curva. Mas isso não significa que não se possa fazer contas com essa parametrização por comprimento de arco. O exemplo seguinte tenta ilustrar esse tipo de situação.

Exemplo 1.10. Considere a parametrização

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (2 \cos t, \sin t) \end{aligned}$$

cujas imagem é a elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Então

$$\gamma'(t) = (-2 \sin t, \cos t) \quad \text{donde} \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{3 \sin^2 t + 1}.$$

O integral $\int_0^t \sqrt{3 \sin^2 u + 1} \, du$ não pode ser escrito em termos de funções elementares.⁶ Mas podemos mesmo assim definir

$$\begin{aligned} s : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_0^t \sqrt{3 \sin^2 u + 1} \, du \end{aligned}$$

e sabemos que $s'(t) = \sqrt{3 \sin^2 t + 1}$. Definindo uma reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$, temos $\gamma = \tilde{\gamma} \circ s$, donde

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \sqrt{3 \sin^2 t + 1}$$

e portanto

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3 \sin^2 t + 1}} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3 \sin^2 t + 1}} (-2 \sin t, \cos t)$$

(o que em si é uma trivialidade: a derivada de $\tilde{\gamma}$ é um vector unitário colinear e com o mesmo sentido da derivada de γ , logo pode ser obtida dividindo a derivada de γ pela sua norma). Analogamente,

$$\frac{d^2 \tilde{\gamma}}{ds^2} = \frac{d^2 \gamma}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d^2 \gamma}{ds^2} \cdot \sqrt{3 \sin^2 t + 1}$$

⁶Isto é, não pode ser obtido a partir de funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e trigonométricas inversas através de um número finito de adições, diferenças, multiplicações, divisões, extrações de raízes e composições.

e portanto

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} &= \frac{1}{\sqrt{3\sin^2 t + 1}} \cdot \frac{d\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}}{dt} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3\sin^2 t + 1}} \left(-\frac{3\sin t \cos t}{(\sqrt{3\sin^2 t + 1})^3} (-2\sin t, \cos t) + \frac{1}{\sqrt{3\sin^2 t + 1}} (-2\cos t, -\sin t) \right) \\
 &= \frac{1}{(3\sin^2 t + 1)^2} (-3\sin t \cos t (-2\sin t, \cos t) + (3\sin^2 t + 1)(-2\cos t, -\sin t)) \\
 &= \frac{1}{(3\sin^2 t + 1)^2} (-2\cos t, -4\sin t).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \kappa(t) &= \left\| \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \right\| = \frac{1}{(3\sin^2 t + 1)^2} \|(-2\cos t, -4\sin t)\| = \\
 &= \frac{2\sqrt{3\sin^2 t + 1}}{(3\sin^2 t + 1)^2} = \frac{2}{(\sqrt{3\sin^2 t + 1})^3}
 \end{aligned}$$

Estas contas não têm de ser repetidas todas as vezes que necessitamos de calcular a curvatura de uma curva que não conseguimos parametrizar por comprimento de arco. A seguinte fórmula poupa muito trabalho (mas repare que o início da sua demonstração é precisamente uma sistematização das contas acima).

Proposição 1.4. *A curvatura da curva parametrizada por $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ em $t = t_0$ é dada por*

$$\kappa(t_0) = \frac{\|\gamma''(t_0) \times \gamma'(t_0)\|}{\|\gamma'(t_0)\|^3}.$$

Demonstração. Sejam $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função comprimento de arco de γ e $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$, donde $\gamma = \tilde{\gamma} \circ s$. então, pela Regra da Cadeia,

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \quad \text{donde} \quad \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} = \frac{\frac{d\gamma}{dt}}{\frac{ds}{dt}},$$

e portanto

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d^2\gamma}{dt^2} \cdot \frac{ds}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} = \frac{\gamma''s' - \gamma's''}{(s')^3};$$

além disso, como $s' = \|\gamma'\|$,

$$(s')^2 = \|\gamma'\|^2 = \gamma' \cdot \gamma'$$

e derivando temos

$$2s's'' = \gamma'' \cdot \gamma' + \gamma' \cdot \gamma'' \quad \text{donde} \quad s's'' = \gamma' \cdot \gamma'';$$

assim,

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} = \frac{\gamma''(s')^2 - \gamma's's''}{(s')^4} = \frac{\gamma''(\gamma' \cdot \gamma') - \gamma'(\gamma' \cdot \gamma'')}{\|\gamma'\|^4};$$

e como, para quaisquer três vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w},$$

temos

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} = \frac{\gamma' \times (\gamma'' \times \gamma')}{\|\gamma'\|^4};$$

ora, como $\gamma'' \times \gamma'$ é ortogonal a γ' , temos ainda que $\|\gamma' \times (\gamma'' \times \gamma')\| = \|\gamma'\| \cdot \|\gamma'' \times \gamma'\|$, e portanto

$$\kappa = \left\| \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \right\| = \frac{\|\gamma' \times (\gamma'' \times \gamma')\|}{\|\gamma'\|^4} = \frac{\|\gamma'\| \cdot \|\gamma'' \times \gamma'\|}{\|\gamma'\|^4} = \frac{\|\gamma'' \times \gamma'\|}{\|\gamma'\|^3}. \quad \square$$

Esta fórmula, tal como está apresentada, aplica-se apenas a curvas em \mathbb{R}^3 . Mas repare que um vector $\gamma_2(t) = (x(t), y(t))$ em \mathbb{R}^2 pode ser identificado com o vector $\gamma_3(t) = (x(t), y(t), 0)$ no plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$; claro que o vector $\gamma_3'' \times \gamma_3' = (0, 0, x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t))$ não pertencerá a esse plano (a não ser quando for nulo), mas para a fórmula da curvatura interessa-nos apenas a sua norma. Assim, se tivermos uma curva no plano parametrizada por $\gamma = (x(t), y(t))$, a sua curvatura será dada por

$$\kappa(t_0) = \frac{|x''(t_0)y'(t_0) - x'(t_0)y''(t_0)|}{\|\gamma'(t_0)\|^3}.$$

Exemplo 1.11. Voltemos à parametrização do exemplo 1.10. Como

$$\gamma'(t) = (-2 \sin t, \cos t) \quad \text{e} \quad \gamma''(t) = (-2 \cos t, -\sin t),$$

identificando \mathbb{R}^2 com $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ temos

$$\|\gamma''(t) \times \gamma'(t)\| = \|(0, 0, -2 \cos^2 t - 2 \sin^2 t)\| = \|(0, 0, -2)\| = 2$$

e a curvatura da curva parametrizada por γ em t é dada por

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma''(t) \times \gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{2}{(\sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t})^3} = \frac{2}{(\sqrt{3 \sin^2 t + 1})^3}.$$

É fácil ver que esta curvatura é máxima quando $\sin t = 0$, isto é, em $t = 0$ e $t = \pi$ (ou nos pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ da elipse); e mínima quando $\sin t = \pm 1$, isto é, em $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$ (ou nos pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$ da elipse).

1.5 Triedro de Frenet; torção

Nesta secção consideraremos curvas orientadas — o que significa que, a menos que falemos em troca de orientação, todas as mudanças de parâmetro terão derivada positiva.

Definição 1.13. Sejam γ uma parametrização e $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu$ uma sua reparametrização por comprimento de arco. Chamaremos *vector tangente unitário* à curva orientada parametrizada por γ em $t = t_0 = \mu(s_0)$ ao vector

$$\mathbf{t}(t_0) = \tilde{\gamma}'(s_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}.$$

É fácil ver que, se invertermos a orientação da curva, o sentido do vector tangente unitário também se inverte; mas o vector tangente unitário é invariante por reparametrizações que mantenham a orientação.

Proposição 1.5. Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ e $F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função derivável tal que $\|F(t)\| = 1$, para todo o $t \in I$; então, para todo o $t \in I$, $F'(t) = 0$ ou $F'(t)$ é ortogonal a $F(t)$.

Demonstração. Temos $1 = \|F(t)\|^2 = F(t) \cdot F(t)$. Derivando, vem $0 = F'(t) \cdot F(t) + F(t) \cdot F'(t)$, donde $F'(t) \cdot F(t) = 0$. \square

Em particular, se $\tilde{\gamma}$ for uma parametrização por comprimento de arco, o vector $\tilde{\gamma}''$ é ortogonal a $\tilde{\gamma}' (= \mathbf{t})$ — excepto quando $\tilde{\gamma}''$ é nulo (ou seja, quando a curvatura é zero).

Definição 1.14. Sejam γ uma parametrização, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu$ uma sua reparametrização por comprimento de arco e t_0 um valor do parâmetro de γ para o qual a curvatura é não nula. Chamaremos *vector normal principal* à curva parametrizada por γ em $t = t_0 = \mu(s_0)$ ao vector

$$\mathbf{n}(t_0) = \frac{\tilde{\gamma}''(s_0)}{\|\tilde{\gamma}''(s_0)\|}.$$

Assim, em cada ponto (de curvatura não nula), \mathbf{t} e \mathbf{n} são vectores unitários ortogonais (em pontos de curvatura nula, \mathbf{n} não está definido).

Repare que, como $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \tilde{\gamma}'' = \mathbf{n} \|\tilde{\gamma}''\|$ e $\kappa = \|\tilde{\gamma}''\|$,

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}.$$

Teremos ocasião de voltar a esta equação.

Repare também que, como

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}}{dt} = \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dt} > 0,$$

os vectores $\frac{d\mathbf{t}}{dt}$ e $\frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2}$ são colineares e têm o mesmo sentido, de forma que

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2}}{\left\| \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \right\|} = \frac{\frac{d\mathbf{t}}{dt}}{\left\| \frac{d\mathbf{t}}{dt} \right\|}.$$

Assim, \mathbf{n} pode ser calculado sem ter de recorrer a uma reparametrização por comprimento de arco.

Repare ainda que as contas do ponto 1. da pág. 15 mostram que \mathbf{n} é invariante por reparametrização — mesmo que se inverta a orientação.

Exemplo 1.12. Consideremos ainda outra vez a parametrização do exemplo 1.10. Como

$$\gamma'(t) = (-2 \operatorname{sen} t, \cos t) \quad \text{e} \quad \gamma''(t) = (-2 \cos t, -\operatorname{sen} t),$$

temos

$$\mathbf{t} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3 \operatorname{sen}^2 t + 1}} (-2 \operatorname{sen} t, \cos t),$$

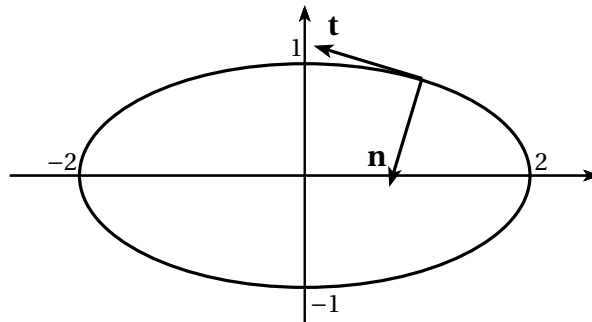
$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = -\frac{3 \operatorname{sen} t \cos t}{(\sqrt{3 \operatorname{sen}^2 t + 1})^3} (-2 \operatorname{sen} t, \cos t) + \frac{1}{\sqrt{3 \operatorname{sen}^2 t + 1}} (-2 \cos t, -\operatorname{sen} t)$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{3 \operatorname{sen}^2 t + 1})^3} (-2 \cos t, -4 \operatorname{sen} t),$$

$$\left\| \frac{d\mathbf{t}}{dt} \right\| = \frac{2}{3 \operatorname{sen}^2 t + 1}$$

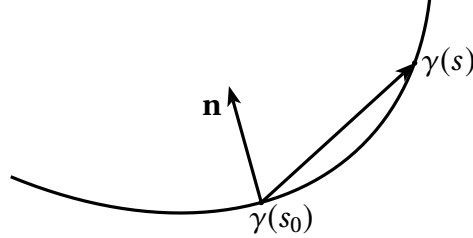
e portanto

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{d\mathbf{t}}{dt}}{\left\| \frac{d\mathbf{t}}{dt} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{3 \operatorname{sen}^2 t + 1}} (-\cos t, -2 \operatorname{sen} t).$$



No caso de curvas planas, isto é, cujo traço está contido num plano, o sentido do vector normal principal tem um significado geométrico: \mathbf{n} aponta no sentido convexo do traço da curva. Para verificar isto, tomaremos uma para-

metrização por comprimento de arco γ e verificaremos que, se s estiver suficientemente próximo de s_0 , o ângulo (não orientado) entre os vectores \mathbf{n} e $\gamma(s) - \gamma(s_0)$ é inferior a $\frac{\pi}{2}$;⁷



para simplificar os cálculos, em vez de \mathbf{n} utilizaremos $\gamma''(s_0)$, que é colinear e tem o mesmo sentido de \mathbf{n} (por γ ser parametrização por comprimento de arco). Tomando o polinómio de Taylor de γ de grau 2 em torno de s_0 , temos

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \gamma'(s_0)(s - s_0) + \gamma''(s_0) \frac{(s - s_0)^2}{2} + R_2(s),$$

onde $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{R_2(s)}{(s - s_0)^2} = 0$. Mas então, como $\gamma'(s_0)$ e $\gamma''(s_0)$ são ortogonais,

$$\gamma''(s_0) \cdot (\gamma(s) - \gamma(s_0)) = 0 + \|\gamma''(s_0)\|^2 \frac{(s - s_0)^2}{2} + \gamma''(s_0) \cdot R_2(s);$$

então

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\gamma''(s_0) \cdot (\gamma(s) - \gamma(s_0))}{(s - s_0)^2} &= \lim_{s \rightarrow s_0} \left(\frac{\|\gamma''(s_0)\|^2}{2} + \gamma''(s_0) \cdot \frac{R_2(s)}{(s - s_0)^2} \right) = \\ &= \frac{\|\gamma''(s_0)\|^2}{2} > 0. \end{aligned}$$

Assim, para algum $\varepsilon > 0$ acontece que, se $0 < |s - s_0| < \varepsilon$, então

$$\frac{\gamma''(s_0) \cdot (\gamma(s) - \gamma(s_0))}{(s - s_0)^2} > 0$$

e portanto

$$\gamma''(s_0) \cdot (\gamma(s) - \gamma(s_0)) > 0;$$

⁷Isto também se verifica para uma curva no espaço, mas nesse caso perde-se a interpretação em termos de convexidade.

mas isto significa precisamente que $\cos \angle\{\gamma''(s_0), \gamma(s) - \gamma(s_0)\} > 0$, ou seja,

$$\angle\{\mathbf{n}, \gamma(s) - \gamma(s_0)\} = \angle\{\gamma''(s_0), \gamma(s) - \gamma(s_0)\} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Daqui para diante interessam-nos apenas curvas em \mathbb{R}^3 .

Definição 1.15. Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de curva e t_0 um valor do parâmetro para o qual a curvatura é não nula. O *plano osculador* à curva parametrizada por γ em $t = t_0$ é o plano

$$\gamma(t_0) + \langle \mathbf{t}(t_0), \mathbf{n}(t_0) \rangle.$$

É claro que se tivermos uma parametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma}$, como $\mathbf{t}(s) = \tilde{\gamma}'(s)$ e $\mathbf{n}(s) = \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\|\tilde{\gamma}''(s)\|}$, o plano osculador poderá ser escrito também como

$$\tilde{\gamma}(s_0) + \langle \tilde{\gamma}'(s_0), \tilde{\gamma}''(s_0) \rangle.$$

Já sabemos que $\gamma'(t_0)$ é colinear com $\tilde{\gamma}'(s_0)$; além disso, de $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ segue que

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dt^2},$$

donde se tira que $\gamma''(t_0)$ é combinação linear de $\tilde{\gamma}''(s_0)$ e $\tilde{\gamma}'(s_0)$ — e não é colinear com $\tilde{\gamma}'(s_0)$, pois $s'(t_0) \neq 0$; assim, podemos ainda escrever o plano osculador como

$$\gamma(t_0) + \langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle.$$

Esta forma de o caracterizar permite ver facilmente que o plano osculador é o plano do qual o traço da curva se encontra “mais próximo”, numa vizinhança de $t = t_0$. De facto, para um valor do parâmetro $t \approx t_0$ temos, tomando o polinómio de Taylor de segundo grau de γ ,

$$\gamma(t) \approx \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + \gamma''(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

e o ponto da esquerda é um ponto de $\gamma(t_0) + \langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle$.

Em particular, vejamos que, se a curva for plana, isto é, se o seu traço es-

tiver contido num plano, esse plano é o plano osculador para todo o valor do parâmetro (a não ser que a curvatura se anule, pois nesses pontos o plano osculador não está definido): de facto, se, para todo o t , $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ pertencer a um plano π de equação $ax + by + cz = d$, isto é,

$$a x(t) + b y(t) + c z(t) = d,$$

então derivando duas vezes vemos que

$$a x'(t) + b y'(t) + c z'(t) = 0$$

e

$$a x''(t) + b y''(t) + c z''(t) = 0,$$

ou seja, que $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ e $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ pertencem ao plano vectorial paralelo a π ; assim, o plano osculador $\gamma(t) + \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle$ é paralelo a π e, tendo em comum o ponto $\gamma(t)$, é precisamente π .

Se a curva parametrizada por γ não for plana numa vizinhança de $t = t_0$, o seu traço afastar-se-á do plano osculador em $t = t_0$ à medida que o parâmetro t se afastar do valor t_0 ; esse afastamento será tanto mais rápido quanto mais “torto”, ou “torcido”, for o traço. Queremos então medir a velocidade desse afastamento, ou quão “torcido” é o traço — a essa medida chamaremos torção.

Repare que isso equivale a medir a variação na direcção do plano osculador — quando t se afastar de t_0 , essa direcção variará tanto mais quanto mais rapidamente o traço da curva se afastar do plano osculador em $t = t_0$. Quanto à direcção de um plano, pode ser caracterizada por um vector unitário que lhe seja perpendicular; ora, é muito fácil introduzir um vector unitário perpendicular ao plano osculador: basta tomar o produto externo $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$.

Definição 1.16. Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de curva e t_0 um valor do parâmetro para o qual a curvatura é não nula. O *vector binormal* à curva orientada parametrizada por γ em $t = t_0$ é o vector

$$\mathbf{b}(t_0) = \mathbf{t}(t_0) \times \mathbf{n}(t_0).$$

Pela definição de produto externo, para todo o $t \in I$, $\|\mathbf{b}(t)\| = 1$ e

$$(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$$

constitui (para cada t) uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 . A este terno chama-se *triedro de Frenet*.

É imediato da definição $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ e do que já sabemos sobre \mathbf{t} e \mathbf{n} que, tal como \mathbf{t} , \mathbf{b} é invariante por reparametrizações que mantenham a orientação mas inverte o sentido se a orientação da curva mudar.

Para medirmos a variação do plano osculador, vamos então derivar \mathbf{b} (em ordem ao comprimento de arco s , que é o parâmetro mais “neutro”).

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(s) &= \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= \kappa(s) \mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \end{aligned}$$

Este resultado diz-nos que $\mathbf{b}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{t}(s)$; mas, como $\|\mathbf{b}(s)\| = 1$ para todo o s , já sabemos que $\mathbf{b}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{b}(s)$; assim, $\mathbf{b}'(s)$ tem de ser colinear com $\mathbf{n}(s)$ — isto é, é o produto de um escalar pelo vector unitário $\mathbf{n}(s)$.

Definição 1.17. Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu$ uma sua reparametrização por comprimento de arco e t_0 um valor do parâmetro de γ para o qual a curvatura é não nula. A *torção* da curva parametrizada por γ em $t = t_0 = \mu(s_0)$ é o escalar $\tau(t_0)$ tal que

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}(s_0) = -\tau(t_0) \mathbf{n}(t_0).$$

A torção é invariante por reparametrização: sejam β uma parametrização e $\alpha = \beta \circ \mu$ uma reparametrização de β com $\mu' < 0$ (deve ser claro que se fosse $\mu' > 0$, as torções associadas a α e β seriam iguais); sejam $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ reparametrizações de α e β , respectivamente, por comprimento de arco — será $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} \circ \tilde{\mu}$ com $\tilde{\mu}' = -1$; sejam ainda s e $r = \tilde{\mu}(s)$ valores correspondentes dos parâmetros de $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ para os quais as curvaturas não se anulam; então,

chamando $\mathbf{b}_\alpha = \mathbf{b}_{\tilde{\alpha}}$ e $\mathbf{b}_\beta = \mathbf{b}_{\tilde{\beta}}$ aos respectivos vectores binormais, temos

$$\mathbf{b}_{\tilde{\alpha}}(s) = -\mathbf{b}_{\tilde{\beta}}(r);$$

pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d\mathbf{b}_{\tilde{\alpha}}}{ds} = -\frac{d\mathbf{b}_{\tilde{\beta}}}{dr} \frac{d\tilde{u}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}_{\tilde{\beta}}}{dr}$$

donde

$$-\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha = -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta$$

e, como $\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{n}_\beta$,

$$\tau_\alpha = \tau_\beta.$$

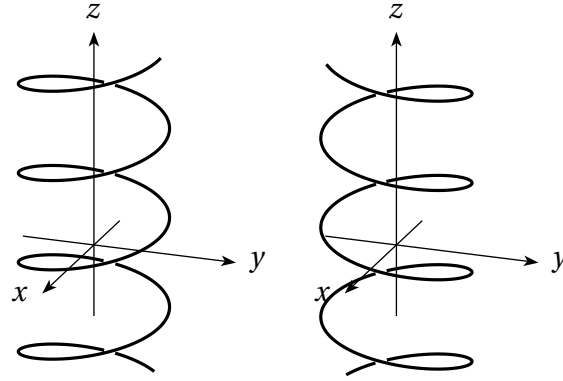
Ao contrário da curvatura, a torção é definida de maneira a poder ser positiva ou negativa: $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ pode ter o mesmo sentido de \mathbf{n} , ou o sentido oposto; se tiver o mesmo sentido, será negativa; se tiver o sentido oposto, será positiva. A razão para esta aparente inversão de sinais (ou seja, para o sinal menos em $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}$) é o facto de querermos que a torção positiva corresponda a curvas que “rodam” no sentido directo; mais precisamente, uma curva tem torção positiva se se afasta do plano osculador no sentido do vector binormal, e negativa se se afasta no sentido oposto.⁸

Exemplo 1.13. Considere a curva parametrizada pela seguinte função, cujo traço é uma hélice circular

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto (a \cos s, a \sin s, b s) \end{aligned}$$

($a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$, para que γ seja uma parametrização por comprimento de arco); a torção desta curva é constante, e tem o mesmo sinal de b (exercício). Na figura seguinte estão representadas duas destas hélices, a da esquerda com torção positiva, e a da direita com torção negativa.

⁸Atenção: alguns autores ignoram este argumento e definem torção como sendo simplesmente o coeficiente de $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ relativamente a \mathbf{n} , ou seja, como o simétrico da nossa torção.



Proposição 1.6. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma curva cuja curvatura nunca se anula. Então o seu traço está contido num plano se e só se a sua torção é identicamente nula.*

Demonstração. Suponhamos que a imagem $\gamma(I)$ está contida num plano. Então, como já vimos, o plano osculador é o mesmo para todo o valor do parâmetro. Assim, o vector binormal é constante, e portanto a torção é nula.

Reciprocamente, suponhamos que a torção é constante nula. Então o vector binormal \mathbf{b} é constante.⁹ Derivemos o produto interno de $\gamma(t)$ por \mathbf{b} :

$$(\gamma(t) \cdot \mathbf{b})' = \gamma'(t) \cdot \mathbf{b} + \gamma(t) \cdot \mathbf{b}' = \|\gamma'(t)\| \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} + 0 = 0;$$

então $\gamma(t) \cdot \mathbf{b}$ é também constante; se chamarmos d a essa constante e escrevermos $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $\mathbf{b} = (a, b, c)$, temos então

$$a x(t) + b y(t) + c z(t) = (x(t), y(t), z(t)) \cdot (a, b, c) = d;$$

logo, para todo o $t \in I$, $\gamma(t)$ pertence ao plano de equação $ax + by + cz = d$. \square

Já tínhamos visto que $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}$ e, por definição de torção, $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}$; o que podemos dizer sobre $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$? Sendo $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, segue que $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$, donde

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\tau \mathbf{n} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \kappa \mathbf{n}$$

⁹Porque estamos a supor que a curvatura nunca se anula e assim temos uma função $t \mapsto \mathbf{b}$ definida num intervalo e com derivada nula; se fosse $I = I_1 \cup \{t_0\} \cup I_2$ com curvatura nula (e portanto \mathbf{b} não definido) em t_0 , poderíamos ter \mathbf{b} constante igual a \mathbf{b}_1 em I_1 e constante igual a \mathbf{b}_2 em I_2 mas $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{b}_2$.

e, como $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}$ e, para quaisquer \mathbf{u}, \mathbf{v} , $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, concluímos que

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}.$$

As três equações

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \kappa \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau \mathbf{n} \end{aligned}$$

são conhecidas como *Fórmulas de Frenet* (ou de *Frenet–Serret*), e são facilmente memorizáveis na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Convém sublinhar que nestas fórmulas as derivadas são calculadas em ordem ao comprimento de arco. Se não tivermos uma parametrização por comprimento de arco, para calcular a torção poderemos, como habitualmente, escrever

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|,$$

donde

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = -\tau \mathbf{n} \|\gamma'(t)\|.$$

No entanto, é frequentemente mais prático usar uma fórmula análoga à da proposição 1.4.

Proposição 1.7. *A torção da curva parametrizada por $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ num ponto*

$t = t_0$ onde a curvatura não se anula é dada por

$$\tau(t_0) = \frac{(\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)) \cdot \gamma'''(t_0)}{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|^2}.$$

Demonstração. Seja $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu^{-1}$ uma reparametrização de γ por comprimento de arco, com $\mu' > 0$, e seja $s = \mu(t)$. Vamos ver primeiro que

$$\frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2} = \frac{(\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)) \cdot \tilde{\gamma}'''(s)}{\|\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)\|^2}.$$

De facto, como

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d\mu}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d^2\mu}{dt^2},$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} \times \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d\mu}{dt} \times \left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d^2\mu}{dt^2} \right) \\ &= \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d\mu}{dt} \times \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d\mu}{dt} \times \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d^2\mu}{dt^2}; \end{aligned}$$

mas a segunda parcela do termo da direita é nula, por ser o produto externo de vectores colineares; assim,

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (\mu'(t))^3 \tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s),$$

donde

$$\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2 = (\mu'(t))^6 \|\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)\|^2;$$

além disso, por ser $\gamma''(t) = \tilde{\gamma}''(s)(\mu'(t))^2 + \tilde{\gamma}'(s)\mu''(t)$, é

$$\gamma'''(t) = \tilde{\gamma}'''(s)(\mu'(t))^3 + 3\tilde{\gamma}''(s)\mu'(t)\mu''(t) + \tilde{\gamma}'(s)\mu'''(t)$$

e portanto

$$(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t) = (\mu'(t))^6 (\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)) \cdot \tilde{\gamma}'''(s).$$

Vejam os agora que a torção da curva parametrizada por $\tilde{\gamma}$ em s (e portanto a torção da curva parametrizada por γ em t) é efectivamente igual a $\frac{(\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)) \cdot \tilde{\gamma}'''(s)}{\|\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)\|^2}$. Ora, de $-\tau \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}'(s)$ vem (fazendo o produto interno por $-\mathbf{n}(s)$)

$$\tau = -\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s);$$

assim, como $\mathbf{t}(s) = \tilde{\gamma}'(s)$ e $\mathbf{n}(s) = \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\|\tilde{\gamma}''(s)\|} = \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\kappa(s)}$,

$$\begin{aligned} \tau &= -\left(\tilde{\gamma}'(s) \times \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\kappa(s)}\right)' \cdot \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\kappa(s)} \\ &= -\left(\tilde{\gamma}''(s) \times \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\kappa(s)} + \tilde{\gamma}'(s) \times \frac{\tilde{\gamma}'''(s)\kappa(s) - \tilde{\gamma}''(s)\kappa'(s)}{(\kappa(s))^2}\right) \cdot \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\kappa(s)} \\ &= -\frac{(\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}'''(s)) \cdot \tilde{\gamma}''(s)}{(\kappa(s))^2} = -\frac{(\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}'''(s)) \cdot \tilde{\gamma}''(s)}{\|\tilde{\gamma}''(s)\|^2} \end{aligned}$$

e como, por um lado, $\|\tilde{\gamma}''(s)\|^2 = \|\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)\|^2$ (por $\tilde{\gamma}'(s)$ ser unitário e ortogonal a $\tilde{\gamma}''(s)$) e, por outro, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ (para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$) concluímos finalmente que

$$\tau = \frac{(\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)) \cdot \tilde{\gamma}'''(s)}{\|\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)\|^2} = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}. \quad \square$$

1.6 Movimentos rígidos; teorema fundamental da teoria local das curvas

Chama-se *movimento rígido* a uma deslocação que não altera a forma dos objectos (não “torce” nem “estica”). Mais rigorosamente, um movimento rígido é a composição de translações com rotações e pode ser representado como a composição de uma translação com uma rotação de centro na origem, isto é, na forma $P \mapsto AP + \mathbf{v}$, onde A é uma matriz ortogonal, $\det A = 1$ e \mathbf{v} é um vector.

Se tomarmos uma curva, parametrizada por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, e lhe aplicarmos um movimento rígido

$$\begin{aligned} M : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\mapsto AP + \mathbf{v} \end{aligned}$$

a curva resultante, parametrizada por $\beta = M \circ \alpha$, terá a mesma curvatura e a mesma torção que a curva original, as mesmas funções comprimento de arco, e o seu triedro de Frenet resultará de aplicar a matriz A (que, recorde-se, representa uma rotação) ao triedro de Frenet da curva original. De facto, repare que, como \mathbf{v} é constante, a matriz jacobiana JM é simplesmente a matriz jacobiana da aplicação $P \mapsto AP$ e, como esta é linear, temos $JM(P) = A$; assim,

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= JM(\alpha(t)) \alpha'(t) = A \alpha'(t) \\ \beta''(t) &= A \alpha''(t) \quad \text{e} \\ \beta'''(t) &= A \alpha'''(t);\end{aligned}$$

além disso, como A é ortogonal, $\|A \alpha'(t)\| = \|\alpha'(t)\|$ (e assim por diante). É trivial verificar que então as contas que conduzem ao comprimento de arco, à curvatura e à torção dão os mesmos resultados para α e para β ; e que, por exemplo, $\mathbf{t}_\beta = \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = \frac{A \alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = A \mathbf{t}_\alpha$.

Reciprocamente, consideremos duas curvas, com parametrizações por comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$,¹⁰ tais que as suas curvaturas e torções são iguais:

$$\kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s) \quad \text{e} \quad \tau_\alpha(s) = \tau_\beta(s), \quad \forall s \in I;$$

então $\beta = M \circ \alpha$, onde M é um movimento rígido. Para verificar esta afirmação, tomemos um valor s_0 do parâmetro s comum às duas parametrizações, a que correspondem os triedros de Frenet

$$(\mathbf{t}_\alpha(s_0), \mathbf{n}_\alpha(s_0), \mathbf{b}_\alpha(s_0)) \quad \text{e} \quad (\mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\beta(s_0), \mathbf{b}_\beta(s_0));$$

como se trata de dois triedros em \mathbb{R}^3 ortonormados com orientação positiva, existe uma rotação que transforma o primeiro no segundo,¹¹ e essa rotação

¹⁰Considerar duas parametrizações por comprimento de arco com o mesmo domínio é uma forma de supor que as duas curvas têm o mesmo comprimento de arco.

¹¹Se por acaso $\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0)$, os planos $\langle \mathbf{n}_\alpha(s_0), \mathbf{b}_\alpha(s_0) \rangle$ e $\langle \mathbf{n}_\beta(s_0), \mathbf{b}_\beta(s_0) \rangle$ coincidem; podemos então rodar $\mathbf{n}_\alpha(s_0)$ nesse plano até coincidir com $\mathbf{n}_\beta(s_0)$; com essa rotação, $\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0)$ ficará inalterado e a imagem de $\mathbf{b}_\alpha(s_0)$ coincidirá necessariamente com $\mathbf{b}_\beta(s_0)$. Se inicial-

pode ser representada por uma matriz A ortogonal, com $\det A = 1$; sejam $\mathbf{v} = \beta(s_0) - M(\alpha(s_0))$ e

$$\begin{aligned} M : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\mapsto AP + \mathbf{v} \end{aligned}.$$

É claro que $(M \circ \alpha)(s_0) = \beta(s_0)$; queremos ver que $(M \circ \alpha)(s) = \beta(s)$, para todo o $s \in I$; para isso, vamos primeiro verificar que

$$\|\mathbf{t}_{M \circ \alpha}(s) - \mathbf{t}_\beta(s)\|^2 + \|\mathbf{n}_{M \circ \alpha}(s) - \mathbf{n}_\beta(s)\|^2 + \|\mathbf{b}_{M \circ \alpha}(s) - \mathbf{b}_\beta(s)\|^2 = 0$$

para todo o $s \in I$; usando as fórmulas de Frenet e o facto de que $\kappa_{M \circ \alpha} = \kappa_\alpha = \kappa_\beta = \kappa$ e $\tau_{M \circ \alpha} = \tau_\alpha = \tau_\beta = \tau$ (e escrevendo $\mathbf{t}_{\tilde{\alpha}}, \mathbf{n}_{\tilde{\alpha}}, \mathbf{b}_{\tilde{\alpha}}$ em vez de $\mathbf{t}_{M \circ \alpha}, \mathbf{n}_{M \circ \alpha}, \mathbf{b}_{M \circ \alpha}$ para tornar as expressões um pouco menos pesadas), temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\|\mathbf{t}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{t}_\beta\|^2 + \|\mathbf{n}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{n}_\beta\|^2 + \|\mathbf{b}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{b}_\beta\|^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} ((\mathbf{t}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{t}_\beta) \cdot (\mathbf{t}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{t}_\beta) + (\mathbf{n}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{n}_\beta) \cdot (\mathbf{n}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{n}_\beta) + (\mathbf{b}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{b}_\beta) \cdot (\mathbf{b}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{b}_\beta)) \\ &= (\mathbf{t}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{t}_\beta) \cdot \left(\frac{d\mathbf{t}_{\tilde{\alpha}}}{ds} - \frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds} \right) + (\mathbf{n}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{n}_\beta) \cdot \left(\frac{d\mathbf{n}_{\tilde{\alpha}}}{ds} - \frac{d\mathbf{n}_\beta}{ds} \right) + (\mathbf{b}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{b}_\beta) \cdot \left(\frac{d\mathbf{b}_{\tilde{\alpha}}}{ds} - \frac{d\mathbf{b}_\beta}{ds} \right) \\ &= (\mathbf{t}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{t}_\beta) \cdot \kappa(\mathbf{n}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{n}_\beta) \\ & \quad - (\mathbf{n}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{n}_\beta) \cdot \kappa(\mathbf{t}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{t}_\beta) + (\mathbf{n}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{n}_\beta) \cdot \tau(\mathbf{b}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{b}_\beta) \\ & \quad - (\mathbf{b}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{b}_\beta) \cdot \tau(\mathbf{n}_{\tilde{\alpha}} - \mathbf{n}_\beta) \\ &= 0; \end{aligned}$$

isto significa que $\|\mathbf{t}_{M \circ \alpha}(s) - \mathbf{t}_\beta(s)\|^2 + \|\mathbf{n}_{M \circ \alpha}(s) - \mathbf{n}_\beta(s)\|^2 + \|\mathbf{b}_{M \circ \alpha}(s) - \mathbf{b}_\beta(s)\|^2$ é constante; como, pela definição de A , $\|\mathbf{t}_{M \circ \alpha}(s_0) - \mathbf{t}_\beta(s_0)\|^2 + \|\mathbf{n}_{M \circ \alpha}(s_0) - \mathbf{n}_\beta(s_0)\|^2 + \|\mathbf{b}_{M \circ \alpha}(s_0) - \mathbf{b}_\beta(s_0)\|^2 = 0$, concluímos que $\|\mathbf{t}_{M \circ \alpha}(s) - \mathbf{t}_\beta(s)\|^2 + \|\mathbf{n}_{M \circ \alpha}(s) - \mathbf{n}_\beta(s)\|^2 + \|\mathbf{b}_{M \circ \alpha}(s) - \mathbf{b}_\beta(s)\|^2 = 0$ e portanto

$$\mathbf{t}_{M \circ \alpha}(s) = \mathbf{t}_\beta(s), \quad \mathbf{n}_{M \circ \alpha}(s) = \mathbf{n}_\beta(s), \quad \mathbf{b}_{M \circ \alpha}(s) = \mathbf{b}_\beta(s),$$

mente $\mathbf{t}_\alpha(s_0)$ e $\mathbf{t}_\beta(s_0)$ forem não colineares, começamos por fazer uma rotação no plano $\langle \mathbf{t}_\alpha(s_0), \mathbf{t}_\beta(s_0) \rangle$ que faça a imagem de $\mathbf{t}_\alpha(s_0)$ coincidir com $\mathbf{t}_\beta(s_0)$ (e se $\mathbf{t}_\alpha(s_0)$ e $\mathbf{t}_\beta(s_0)$ forem distintos mas colineares?); a seguir fazemos uma rotação como no caso anterior e consideramos a composta destas duas rotações.

para todo o $s \in I$. Finalmente, como

$$\frac{d}{ds}(M \circ \alpha - \beta) = \mathbf{t}_{M \circ \alpha} - \mathbf{t}_\beta = 0,$$

$M \circ \alpha - \beta$ tem de ser constante; mas $(M \circ \alpha)(s_0) - \beta(s_0) = 0$, logo

$$(M \circ \alpha)(s) = \beta(s), \quad \text{para todo o } s \in I,$$

como queríamos.

Resumindo o que vimos até agora: duas curvas têm comprimento de arco, curvatura e torção iguais se e só se são a mesma curva a menos de um movimento rígido (isto é, se e só se cada uma pode ser obtida a partir da outra aplicando um movimento rígido).

Para concluirmos que uma curva fica completamente determinada (a menos de um movimento rígido) pelo comprimento de arco, curvatura e torção, falta apenas ver que dados um parâmetro para ser o comprimento de arco e duas funções para serem curvatura e torção, existe uma curva com esses elementos.

Teorema 1.8 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas). *Dadas funções $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , com $\kappa(s) > 0$ para todo o $s \in I$, existe uma curva com uma parametrização por comprimento de arco $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuja curvatura é $\kappa(s)$ e cuja torção é $\tau(s)$, para cada $s \in I$. Esta curva é única, a menos de um movimento rígido.*

Demonstração. A unicidade foi vista acima.

Quanto à existência, o passo principal consiste em reparar que as três fórmulas de Frenet

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \kappa \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau \mathbf{n} \end{aligned} \tag{1}$$

decompostas de acordo com as componentes dos vectores intervenientes,

constituem um sistema de nove equações diferenciais ordinárias lineares. Por um resultado da teoria das equações diferenciais ordinárias, o sistema (1) tem uma solução única

$$(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)), \quad s \in I$$

para as condições iniciais

$$\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{t}_0, \quad \mathbf{n}(s_0) = \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{b}(s_0) = \mathbf{b}_0;$$

naturalmente, escolhemos para condições iniciais algum triedro ortonormado com orientação positiva $(\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)$.

Devemos verificar que a solução $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ se mantém ortonormada; ora, como esta solução tem de verificar o sistema (1), vemos facilmente que verifica

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})}{ds} &= \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - \kappa \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} + \tau \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \\ \frac{d(\mathbf{t} \cdot \mathbf{b})}{ds} &= \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} - \tau \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \\ \frac{d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})}{ds} &= -\kappa \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} + \tau \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \tau \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})}{ds} &= 2\kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \\ \frac{d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})}{ds} &= -2\kappa \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} + 2\tau \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \\ \frac{d(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})}{ds} &= -2\tau \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}; \end{aligned}$$

ora, é ainda mais fácil verificar que, para as condições iniciais

$$\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = 0, \quad \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = 1$$

(por $(\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)$ ser ortonormado),

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$$

é uma solução — e, por unicidade, é a solução — deste novo sistema.

Tendo o triedro ortonormado $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ para cada $s \in I$, encontramos uma parametrização da curva procurada fazendo

$$\gamma(s) = \int_I \mathbf{t} ds$$

(integração componente a componente). Trata-se de uma parametrização por comprimento de arco: $\|\gamma'(s)\| = \|\mathbf{t}(s)\| = \sqrt{\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s)} = 1$. O vector tangente unitário é $\gamma'(s) = \mathbf{t}(s)$. O vector normal principal é $\frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} = \frac{\kappa(s)\mathbf{n}(s)}{\kappa(s)} = \mathbf{n}(s)$ (por verificar a primeira equação de (1), \mathbf{n} ser unitário e κ positiva). O vector binormal é $\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s)$ (por $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ ser ortonormado com orientação positiva). Por $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ ser uma solução do sistema (1), as funções $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ que lá apareciam (e que são as do enunciado) são a curvatura e a torção desta curva. \square

Apêndice

Como prometido, vamos demonstrar o resultado seguinte, que foi enunciado na página 8:

Proposição 1.1 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular injectiva, com $I = [a, b]$, para alguns $a, b \in \mathbb{R}$. Se $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ for outra parametrização regular com a mesma imagem, então $\tilde{\gamma}$ será uma reparametrização de γ .*

Demonstração. Seja $C = \gamma([a, b]) = \tilde{\gamma}(J)$. Por a parametrização γ ser injectiva, tem uma inversa $\gamma^{-1} : C \rightarrow [a, b]$. Vamos definir uma função $\mu : J \rightarrow [a, b]$ por

$$\mu = \gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma};$$

então $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu$ e queremos ver que μ é uma mudança de parâmetro, isto é, que μ é uma bijecção e tanto μ como μ^{-1} são de classe C^∞ .

A sobrejectividade de μ é imediata: $\mu(J) = \gamma^{-1}(\tilde{\gamma}(J)) = \gamma^{-1}(C) = [a, b]$. A injectividade será verificada mais tarde.

A função μ é contínua: de facto, γ^{-1} é contínua, por ser a inversa de uma

função contínua definida num compacto,¹² e portanto μ é a composta de duas funções contínuas.

Para vermos que μ é C^∞ , seria tentador dizer que $\mu = \gamma^{-1} \circ \alpha$ é a composta de duas aplicações C^∞ ; contudo, o domínio de γ^{-1} é um subconjunto de \mathbb{R}^n com interior vazio, e portanto não sabemos falar (ainda) em diferenciabilidade. Felizmente, podemos caracterizar μ de uma maneira mais apropriada para este efeito.

Digamos que

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}(u) = (\tilde{x}(u), \tilde{y}(u))$$

(o caso de curvas em \mathbb{R}^3 é perfeitamente análogo) e tomemos um $u_0 \in J$. Seja $t_0 = \mu(u_0)$; como é $\gamma'(t_0) \neq 0$ (por γ ser regular), uma das componentes de $\gamma'(t_0)$ é não nula; sem perda de generalidade, suponhamos que $x'(t_0) \neq 0$. Então, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança T de t_0 tal que a função $x|_T$ é injectiva e a sua inversa $(x|_T)^{-1}$ é de classe C^∞ ; repare que esta injectividade significa que no arco $\gamma(T) \subseteq C$ não há dois pontos com a mesma abcissa. Façamos agora $U = \mu^{-1}(T)$; temos que U é uma vizinhança de u_0 (porque μ é contínua, e portanto a imagem recíproca por μ de um aberto é um aberto).

Para simplificar, vamos escrever x em vez de $x|_T$. Consideremos então a função

$$\begin{aligned} \nu : U &\rightarrow T \\ u &\mapsto x^{-1}(\tilde{x}(u)) \end{aligned}$$

É claro que $\nu = \mu|_U$: de facto, se $t = \nu(u)$, então $x(t) = \tilde{x}(u)$ e o único ponto em $\gamma(T) = \tilde{\gamma}(U)$ com essa abcissa será $(x(t), y(t)) = (\tilde{x}(u), \tilde{y}(u))$, isto é $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(u)$, donde se conclui que $t = \mu(u)$.

Ora, a função \tilde{x} é de classe C^∞ (por ser uma componente de $\tilde{\gamma}$) e já vimos que a função x^{-1} é também C^∞ ; assim, $\mu|_U$ é C^∞ por ser a composta de duas funções C^∞ . Como este argumento pode ser repetido para cada valor de J

¹²Recorde que uma função é contínua se e só se a imagem recíproca de um qualquer fechado é um fechado. Ora, a imagem recíproca por γ^{-1} de um fechado é a imagem por γ desse fechado e, sendo o domínio de γ um compacto, esse fechado será compacto; sendo γ contínua, a imagem desse compacto será um compacto — e portanto será fechado.

(eventualmente nalguns casos com y e \tilde{y} em vez de x e \tilde{x}), concluímos que a função μ é C^∞ em todo o seu domínio.

Visto que μ' existe, vejamos que nunca se anula: $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu$, donde, para todo $u \in J$,

$$\tilde{\gamma}'(u) = \gamma'(\mu(u)) \cdot \mu'(u);$$

ora, se fosse $\mu'(u) = 0$, seria $\tilde{\gamma}'(u) = \mathbf{0}$; mas $\tilde{\gamma}$ é uma parametrização regular.

Temos então que μ é uma função real definida num intervalo, com derivada contínua que nunca se anula — e portanto μ é injectiva (porque tem de ser μ' sempre positiva, e μ estritamente crescente; ou μ' sempre negativa, e μ estritamente decrescente).

Finalmente, aplicando o Teorema da Função Inversa em cada ponto de J (porque, mais uma vez, μ' não se anula), vemos que μ^{-1} é também de classe C^∞ . □

2 Superfícies

2.0 Homeomorfismos

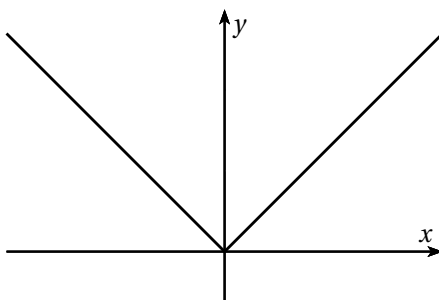
Um conceito muito importante para o que se segue é o de *homeomorfismo*. Recordamos que um homeomorfismo entre dois espaços topológicos (ou em particular entre dois espaços métricos) X e Y é uma aplicação $h : X \rightarrow Y$ bijectiva, contínua e tal que a sua inversa $h^{-1} : Y \rightarrow X$ é também contínua.

Mas qualquer aplicação é sobrejectiva sobre a sua imagem; isto é, se $h : X \rightarrow Y$ for injectiva mas não sobrejectiva, podemos dizer que $h : X \rightarrow h(X) \subseteq Y$ é bijectiva. Assim, por abuso de linguagem diremos que uma aplicação $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo se for injectiva, contínua e a sua inversa $F^{-1} : F(U) \rightarrow U$ for também contínua. Dizemos também (sem abuso de linguagem) que U e $F(U)$ são *homeomorfos*.

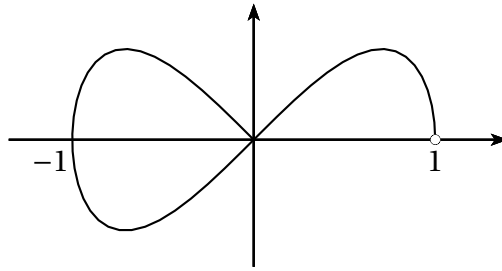
Vejamos três exemplos (um de um homeomorfismo, outro de um não-homeomorfismo e um último de um não-homeomorfismo que pode facilmente ser transformado num homeomorfismo).

Exemplo 2.1. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, |t|)$ é um homeomorfismo. A injectividade é imediata (basta reparar que a primeira componente de α é a função identidade); a continuidade também (tanto a identidade como a função módulo são contínuas); quanto a α^{-1} ser contínua, basta reparar que é a restrição ao conjunto $\alpha(\mathbb{R})$ de uma função $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, nomeadamente a projecção sobre a primeira coordenada $(x, y) \mapsto x$.

(Parte d) o conjunto $\alpha(\mathbb{R})$ está representado na figura seguinte. Este conjunto, composto por duas semi-rectas com a mesma origem $(0, 0)$, é portanto homeomorfo a \mathbb{R} .



Exemplo 2.2. A aplicação $\beta :]0, \frac{3\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(t) = (\cos t, \frac{1}{2} \sin 2t)$ é injectiva e contínua, mas não é um homeomorfismo, porque β^{-1} não é contínua em $(0, 0)$. Repare que $\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \beta(t) = (0, 0)$ e $(0, 0) \in \beta(]0, \frac{3\pi}{2}[)$ porque $(0, 0) = \beta(\frac{\pi}{2})$. Ora, consideremos a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $u_n = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}$. A sucessão de pontos de $\beta(]0, \frac{3\pi}{2}[)$ dada por $P_n = \beta(u_n)$ converge para $\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \beta(t) = (0, 0)$; no entanto, a sucessão $\beta^{-1}(P_n) = u_n$ não é convergente em $]0, \frac{3\pi}{2}[$ (porque $\frac{3\pi}{2} \notin]0, \frac{3\pi}{2}[$).



O conjunto $\beta(]0, \frac{3\pi}{2}[)$ está representado na figura acima. Poderíamos pensar que existe uma outra aplicação definida num intervalo de \mathbb{R} cuja imagem é este conjunto e que é um homeomorfismo. Não vamos dar aqui os detalhes do porquê, mas tal aplicação não existe: este conjunto não é homeomorfo a nenhum intervalo de \mathbb{R} (o problema está na forma de Y perto de $(0, 0)$).

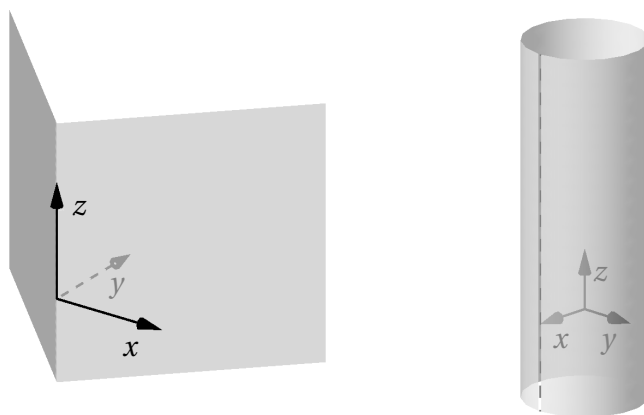
Exemplo 2.3. A aplicação $\gamma : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ é também injectiva e contínua, mas não é um homeomorfismo, porque γ^{-1} não é contínua em $(1, 0)$: a sucessão dos pontos $\gamma(2\pi - \frac{1}{n})$ tende para $(1, 0)$, mas a sucessão dos valores $2\pi - \frac{1}{n}$ não é convergente em $[0, 2\pi[$. Podemos facilmente obter um homeomorfismo a partir de γ , restringindo o domínio a $]0, 2\pi[$; no entanto, a imagem deixa de ser a circunferência \mathbb{S}^1 , e passa a ser $\mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$. Uma circunferência “menos um ponto” é de facto um conjunto homeomorfo a um intervalo aberto de \mathbb{R} , enquanto uma circunferência não é homeomorfa a um intervalo de \mathbb{R} .

Por uma questão de simplicidade, começámos por ver exemplos referentes a conjuntos homeomorfos (ou não) a intervalos de \mathbb{R} ; mas vamos estar mais interessados em conjuntos homeomorfos a subconjuntos abertos de \mathbb{R}^2 .

Adaptando os exemplos acima, é fácil ver que as aplicações

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (u, |u|, v) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc}]0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (\cos u, \sin u, v) \end{array}$$

são homeomorfismos — os cilindros com bases $\alpha(\mathbb{R})$ e $\gamma(]0, 2\pi[)$, isto é, os conjuntos $\alpha(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ e $\gamma(]0, 2\pi[) \times \mathbb{R}$, são homeomorfos a \mathbb{R}^2 e $]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ respectivamente; mais geralmente, se X for homeomorfo a Y , $X \times Z$ será homeo-



morfo a $Y \times Z$. Também é fácil ver que as aplicações

$$\begin{array}{ccc}]0, \frac{3\pi}{2}[\times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (\cos u, \frac{1}{2} \sin 2u, v) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc}]0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (\cos u, \sin u, v) \end{array}$$

não são homeomorfismos. Mas aqui é preciso mais cuidado a tirar conclusões sobre os conjuntos envolvidos: $\beta(]0, \frac{3\pi}{2}[) \times \mathbb{R}$ de facto não é homeomorfo a um subconjunto de \mathbb{R}^2 ; mas $\gamma([0, 2\pi[) \times \mathbb{R}$ (ou seja, o cilindro de base \mathbb{S}^1) é homeomorfo a, por exemplo, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ — isto porque

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \log(u^2 + v^2) \right) \end{array}$$

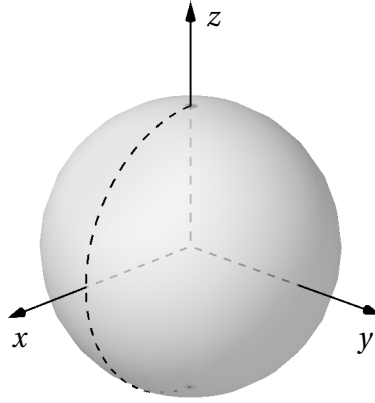
é um homeomorfismo e a sua imagem é $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Claro que os cilindros, isto é, os conjuntos da forma $X \times \mathbb{R}$ (com $X \subseteq \mathbb{R}^2$) são apenas um caso particular dos subconjuntos de \mathbb{R}^3 . Mas de outros ca-

so apenas observaremos (sem o provar) que, tal como a circunferência \mathbb{S}^1 não é homeomorfa a um subconjunto de \mathbb{R} , a esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ não é homeomorfa a um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Mas se lhe retirarmos um meridiano (isto é, uma semi-circunferência máxima) ficamos com um conjunto homeomorfo a um rectângulo aberto: a imagem da aplicação

$$\begin{aligned}]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \end{aligned}$$

é o conjunto $\mathbb{S}^2 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ e } x^2 + z^2 = 1\}$ e esta aplicação é um



homeomorfismo (é claramente contínua, é injectiva [exercício] e a sua inversa

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ e } x^2 + z^2 = 1\} &\rightarrow]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ (x, y, z) &\mapsto \left(\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}\right), \arcsen z \right) \end{aligned}$$

é também claramente contínua).

2.1 Definições iniciais

Definição 2.1. Uma *parametrização de superfície* é uma aplicação $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que σ é um homeomorfismo (sobre a sua imagem) e é de classe C^∞ .

À imagem $\sigma(U)$ de uma tal parametrização de superfície chamamos uma *porção de superfície*.

Exemplo 2.4. As aplicações

$$\begin{aligned}\sigma_1 :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u, \sin u, v)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_2 :]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)\end{aligned}$$

são parametrizações de superfície; assim, os conjuntos

$$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{(1, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \mathbb{S}^2 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ e } x^2 + z^2 = 1\}$$

são porções de superfície.

Exemplo 2.5. A aplicação

$$\begin{aligned}\sigma_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \log(u^2 + v^2) \right)\end{aligned}$$

é uma parametrização de superfície; assim, o conjunto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ é uma porção de superfície.

Exemplo 2.6. A aplicação

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, |u|, v)\end{aligned}$$

é um homeomorfismo, mas de classe apenas C^0 : não é diferenciável nos pontos da forma $(0, v)$.

Exemplo 2.7. Se $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização de superfície e $V \subseteq U$ é também aberto, $\sigma|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é também uma parametrização de superfície, de forma que $\sigma(V)$ é uma porção de superfície contida na porção de superfície $\sigma(U)$.

Na prática, vamos em geral trabalhar com porções de superfície. Mas interessa-nos saber que podemos considerar objectos mais gerais: superfícies.

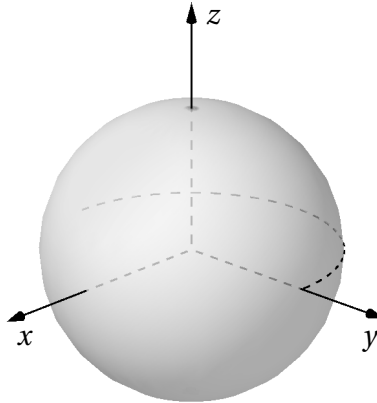
Definição 2.2. Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma *superfície (diferenciável)* se, para todo o ponto $P \in S$, existir uma vizinhança V de P tal que $S \cap V$ é uma porção de superfície.

Exemplo 2.8. Qualquer porção de superfície é uma superfície: basta tomar, para qualquer P , a vizinhança \mathbb{R}^3 .

Exemplo 2.9. A esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície. De facto, já vimos que $\mathbb{S}^2 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ e } x^2 + z^2 = 1\}$ é uma porção de superfície; para um P que pertença a este conjunto, podemos tomar a vizinhança $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$; para um P que pertença ao meridiano em falta $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ e } x^2 + z^2 = 1\}$, podemos considerar a aplicação

$$\begin{aligned}]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (-\cos u \cos v, \sin v, \sin u \cos v) \end{aligned}$$

que é também um homeomorfismo (sobre a sua imagem) de classe C^∞ , e que parametriza a porção de superfície $\mathbb{S}^2 \setminus \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0 \text{ e } x^2 + y^2 = 1\}$;



neste caso, a vizinhança V pode ser $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, 0) : x \leq 0\}$.

Assim, uma superfície é uma reunião de porções de superfície, cada uma com a sua parametrização, de forma que a intersecção de duas dessas porções ou é vazia ou é ainda uma porção de superfície.

Quando σ for uma parametrização de uma porção de superfície contida numa superfície S , diremos que σ é uma *parametrização local* de S .

Definição 2.3. Um *atlas* de uma superfície S é um conjunto $\{\sigma_i : i \in I\}$ de parametrizações $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $S = \bigcup_{i \in I} \sigma(U_i)$.

Exemplo 2.10. Considere as parametrizações $\sigma_1, \sigma_2 :]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\sigma_1(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

e

$$\sigma_2(u, v) = (-\cos u \cos v, \sin v, \sin u \cos v);$$

o conjunto $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é um atlas de \mathbb{S}^2 .

Exemplo 2.11. Considere as aplicações

$$\begin{aligned} \sigma_1 :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 & \sigma_2 :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u, \sin u, v) & (u, v) &\mapsto (\sin u, \cos u, v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \log(u^2 + v^2) \right); \end{aligned}$$

cada um dos conjuntos

$$\{\sigma_1, \sigma_2\} \quad \text{e} \quad \{\sigma_3\}$$

é um atlas do cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Tal como no caso das curvas, não é suficiente pedir que as parametrizações de superfície sejam diferenciáveis; vamos exigir também que sejam regulares:

Definição 2.4. Uma parametrização de superfície $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diz-se *regular* se, para todo $(u_0, v_0) \in U$,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \mathbf{0},$$

ou, equivalentemente, se os vectores $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$ forem linearmente independentes.

Uma superfície diz-se *regular* se tiver um atlas composto de parametrizações regulares.

Exemplo 2.12. \mathbb{S}^2 é uma superfície regular, já que as parametrizações σ_1, σ_2 do exemplo 2.10 são regulares:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} &= (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0) \times (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v) \\ &= (\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, \sin v \cos v)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} &= (\sin u \cos v, 0, \cos u \cos v) \times (\cos u \sin v, \cos v, -\sin u \sin v) \\ &= (-\cos u \cos^2 v, \sin v \cos v, \sin u \cos^2 v)\end{aligned}$$

e estes vectores são não nulos, pois

$$\left\| \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \right\| = \sqrt{\cos^4 v + \sin^2 v \cos^2 v} = \cos v \neq 0$$

$$(v \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[).$$

Exemplo 2.13. O cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ é também uma superfície regular: considerando o atlas $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ do exemplo 2.11,

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} = (-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1) = (\cos u, \sin u, 0) \neq \mathbf{0}$$

e

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} = (\cos u, -\sin u, 0) \times (0, 0, 1) = (-\sin u, -\cos u, 0) \neq \mathbf{0}$$

(o seno e o cosseno nunca se anulam simultaneamente).

Exemplo 2.14. Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ , com U aberto. Os conjuntos

$$\begin{aligned}\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}, \\ \{(x, f(x, z), z) : (x, z) \in U\} \quad \text{e} \\ \{(f(y, z), y, z) : (y, z) \in U\}\end{aligned}$$

isto é, os gráficos $z = f(x, y)$, $y = f(x, z)$ e $x = f(y, z)$, são porções de superfície regulares. Vejamos o caso de $G_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$: a aplicação

$$\begin{aligned} g_f : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

é uma parametrização de superfície regular, pois é claramente C^∞ e injectiva, a sua inversa

$$\begin{aligned} g_f^{-1} : G_f &\rightarrow U \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

é claramente contínua e

$$\frac{\partial g_f}{\partial u} \times \frac{\partial g_f}{\partial v} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right) \neq \mathbf{0}.$$

Exemplo 2.15. Sejam $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ e $c \in \mathbb{R}$ um valor tal que se $f(x, y, z) = c$ então $\nabla f(x, y, z) \neq \mathbf{0}$; então o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$$

é uma superfície regular. De facto, fixando um $(x_0, y_0, z_0) \in S$, segue de $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ou $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$; sem perda de generalidade, suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$; pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças abertas V de (x_0, y_0, z_0) e W de (x_0, y_0) e uma função $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tais que

$$S \cap V = \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in W\};$$

mas então $S \cap V$ é uma porção de superfície regular (exemplo 2.14).

A partir de agora, vamos limitar-nos a parametrizações de superfície e superfícies regulares, e vamos em geral omitir o adjectivo “regular”.

Suponhamos que $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ são duas parametrizações de superfície regulares, e que $\sigma(U) = S = \tilde{\sigma}(\tilde{U})$. Então a aplicação $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ dada por $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ é uma bijecção por ser a composta de duas bijecções; mas, além disso, Φ é de classe C^∞ . Para verificarmos esta última afirmação,

vamos fixar um ponto $P = (x_0, y_0, z_0) = \sigma(u_0, v_0) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ e escrever

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{y}(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{z}(\tilde{u}, \tilde{v}));$$

como os vectores¹³ $\sigma_u(u_0, v_0)$ e $\sigma_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes, a matriz jacobiana de σ em (u_0, v_0) , que é uma matriz 3×2 cujas colunas correspondem precisamente a esses vectores, tem uma submatriz 2×2 invertível; sem perda de generalidade, suponhamos que essa submatriz é

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)};$$

mas então, pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças V de (u_0, v_0) e W de (x_0, y_0) tais que a função

$$\begin{aligned} h : V &\rightarrow W \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

é bijectiva e a sua inversa é de classe C^∞ ; ora, se fizermos $\tilde{V} = \Phi^{-1}(V) = \tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma(V)$ e

$$\begin{aligned} \tilde{h} : \tilde{V} &\rightarrow \tilde{W} \\ (\tilde{u}, \tilde{v}) &\mapsto (\tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{y}(\tilde{u}, \tilde{v})) \end{aligned}$$

com $\tilde{W} = \tilde{h}(\tilde{V})$, ou seja, \tilde{W} igual à projecção sobre o plano xy de $\tilde{\sigma}(\tilde{V}) = \sigma(V)$, teremos $\tilde{W} = W$ e

$$\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma} = h^{-1} \circ \tilde{h};$$

como h^{-1} e \tilde{h} são de classe C^∞ , podemos concluir que Φ também o é em V ; e, como podemos repetir este argumento para todo o $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in \tilde{U}$, concluímos que Φ é de classe C^∞ .¹⁴ Analogamente, Φ^{-1} é de classe C^∞ . Ou seja, Φ é um difeomorfismo C^∞ .

¹³Usaremos normalmente a notação $\sigma_u, \sigma_v, \sigma_{uu}, \sigma_{uv}, \dots$ para $\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial v}, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v}, \dots$ respectivamente.

¹⁴Este argumento é análogo à demonstração da proposição 1.1. No entanto é mais simples, porque impusemos, por definição, que as parametrizações de superfície sejam homeomorfismos (ao contrário das parametrizações de curvas).

É também claro que, se tivermos uma parametrização de superfície $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e tomarmos um difeomorfismo $\Phi : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ de classe C^∞ , a composta $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$ será uma parametrização de superfície regular: que cumpre as condições da definição 2.1 é imediato, pois é a composta de dois homeomorfismos de classe C^∞ ; quanto a ser regular, escrevendo $(u, v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$ temos, pela regra da cadeia,

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} = \sigma_u u_{\tilde{u}} + \sigma_v v_{\tilde{u}} \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \sigma_u u_{\tilde{v}} + \sigma_v v_{\tilde{v}},$$

donde

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = (u_{\tilde{u}} v_{\tilde{v}} - v_{\tilde{u}} u_{\tilde{v}}) (\sigma_u \times \sigma_v) = \text{Jac} \Phi (\sigma_u \times \sigma_v)$$

(onde $\text{Jac} \Phi$ é o jacobiano de Φ — isto é, $\text{Jac} \Phi = \det(J\Phi)$, sendo $J\Phi$ a matriz jacobiana de Φ) e, como Φ é invertível e derivável, $\text{Jac} \Phi \neq 0$.¹⁵

Definição 2.5. Uma parametrização de superfície $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma *reparametrização* de uma parametrização $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ se a função $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ dada por $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ for um homeomorfismo de classe C^∞ com inversa de classe C^∞ (isto é, um difeomorfismo C^∞).

A discussão acima prova o seguinte resultado:

Proposição 2.1. *Duas quaisquer parametrizações de uma mesma porção de superfície são reparametrização uma da outra.*

No caso de duas parametrizações *locais* da mesma superfície, isto é, de duas parametrizações de porções de superfície contidas numa mesma superfície — ou, ainda, de dois elementos de um atlas de uma superfície — não podemos falar estritamente em “reparametrização” se essas porções de superfície forem distintas; mas, desde que a sua intersecção não seja vazia, se restringirmos os domínios das parametrizações aos valores dos parâmetros que são enviados na intersecção dessas porções teremos de facto reparametrizações. Falamos então em “reparametrização local”:

¹⁵ $\Phi \circ \Phi^{-1}$ é a função identidade em U logo, pela regra da cadeia, $J\Phi J(\Phi^{-1}) = I_2$ e portanto $J\Phi$ é invertível.

Definição 2.6. Uma parametrização de superfície $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é *localmente* uma *reparametrização* de uma parametrização $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ se os conjuntos $V = \sigma^{-1}(\sigma(U) \cap \sigma(\tilde{U}))$ e $\tilde{V} = \tilde{\sigma}^{-1}(\sigma(U) \cap \sigma(\tilde{U}))$ forem não vazios e a função $\Phi : \tilde{V} \rightarrow V$ dada por $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ for um difeomorfismo de classe C^∞ .

Teremos muitas oportunidades de utilizar o facto de duas parametrizações locais de uma superfície serem localmente reparametrização uma da outra (desde que parametrizem porções não disjuntas) e, em especial, de nessa situação usar a relação

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \text{Jac}(\sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma})(\sigma_u \times \sigma_v).$$

2.2 Espaço tangente; diferenciabilidade; orientação

Tal como uma curva tem uma recta tangente em cada ponto, uma superfície tem um plano tangente em cada ponto. Este plano tangente é formado pelas rectas tangentes nesse ponto às curvas cujos traços estão contidos na superfície. (Para simplificar a linguagem, vamos convencionar que dizemos que uma curva está contida numa superfície S , ou que é uma curva na superfície S , se o seu traço estiver contido em S ; e que a curva passa pelo ponto P se P estiver contido no seu traço.)

Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização de uma curva na superfície S , e se $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização local de S com $\gamma(t_0) = \sigma(u_0, v_0)$, então existe um intervalo $J \subseteq I$, contendo t_0 , tal que $\gamma(t) \in \sigma(U)$, para todo o $t \in J$. Ora, $\sigma^{-1} \circ \gamma : J \rightarrow U$ é uma parametrização de curva¹⁶, que representaremos por $(u(t), v(t))$, de forma que, para $t \in J$,

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)).$$

¹⁶Que $\sigma^{-1} \circ \gamma$ é C^∞ , pode ser visto facilmente usando um argumento análogo ao da página 48: em cada ponto (u_0, v_0) , a matriz jacobiana de σ tem uma submatriz 2×2 invertível; se esta corresponder, por exemplo, a $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, e se $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, tomamos $g(t) = (x(t), y(t))$ e então $\sigma^{-1} \circ \gamma = h^{-1} \circ g$ é evidentemente C^∞ . Que é regular, resulta da regularidade de γ e da relação $\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$ (mais abaixo): se fosse $(\sigma^{-1} \circ \gamma)'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0)) = (0, 0)$, viria $\gamma'(t_0) = \mathbf{0}$.

Usando a regra da cadeia, vemos que

$$\gamma'(t) = \sigma_u(u(t), v(t)) u'(t) + \sigma_v(u(t), v(t)) v'(t),$$

ou, omitindo os parâmetros por uma questão de simplicidade,

$$\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$$

(subentende-se que γ' , u' e v' são calculadas em t e σ_u e σ_v em $(u(t), v(t))$). Esta caracterização das parametrizações de curvas em superfícies e das suas derivadas vai ser útil muitas vezes.

Por enquanto, interessa-nos reparar que, fixando-nos num ponto $P = \gamma(t_0) = \sigma(u_0, v_0)$, a derivada da parametrização de curva γ (calculada em t_0) é combinação linear de σ_u e σ_v (estas calculadas em (u_0, v_0) , claro). Reciprocamente, sejam a, b dois números reais, pelo menos um dos quais não nulo (de forma que o vector $a\sigma_u + b\sigma_v$ é não nulo); por U ser aberto, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $]u_0 - a\varepsilon, u_0 + a\varepsilon[\times]v_0 - b\varepsilon, v_0 + b\varepsilon[\subseteq U$, e podemos definir uma parametrização de curva $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\gamma(t) = \sigma(u_0 + at, v_0 + bt)$; será então

$$\gamma' = \sigma_u a + \sigma_v b.$$

Resumindo: as derivadas das parametrizações de curvas em S que passam por P , tomadas em $P = \sigma(u_0, v_0)$, são precisamente as combinações lineares não nulas de σ_u e σ_v , calculadas em (u_0, v_0) .

Como cada uma dessas derivadas é um vector tangente a uma curva que está na superfície, é natural considerá-la também tangente à superfície, e definir o espaço tangente à superfície à sua custa:

Definição 2.7. Dadas uma superfície S e um ponto $P \in S$, o *espaço (vectorial) tangente* a S em P , que representaremos por $\mathcal{T}_S(P)$, é o espaço vectorial formado pelo vector nulo e pelas derivadas $\gamma'(t_0)$ das parametrizações γ de curvas em S tais que $P = \gamma(t_0)$.

O que vimos acima diz-nos que, se $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização

local de S e $P = \sigma(u_0, v_0)$, então

$$\mathcal{T}_S(P) = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$$

(σ_u e σ_v calculadas em (u_0, v_0)).

Mas, para termos a certeza de que o espaço tangente está bem definido, falta ver que é invariante por reparametrização. Ora, se $\tilde{\sigma}$ for outra parame- trização local de S , teremos

$$\langle \tilde{\sigma}_{\tilde{u}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \rangle = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle,$$

pois $\langle \tilde{\sigma}_{\tilde{u}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \rangle$ é o espaço ortogonal ao vector $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$, $\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$ é o espaço orto- gonal ao vector $\sigma_u \times \sigma_v$ e estes dois vectores são colineares, devido à relação $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \text{Jac}(\sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma})(\sigma_u \times \sigma_v)$.

Repare também que a regularidade de S (isto é, a independência linear de σ_u e σ_v) nos garante que $\mathcal{T}_S(P)$ tem dimensão 2: é um plano vectorial.

Analogamente à(s) tangente(s) a uma curva num ponto, é natural consi- derar também o plano afim tangente a S em P :

Definição 2.8. Dadas uma superfície S e um ponto $P \in S$, o *plano (afim) tangente* a S em P é o plano $P + \mathcal{T}_S(P)$.

Mas, para todos os efeitos técnicos, é o espaço vectorial tangente que nos interessa.

Um dos aspectos técnicos em que é necessário o espaço tangente é a ex- tensão da noção de diferencial a funções entre superfícies.¹⁷

Consideremos duas superfícies S_1 e S_2 , um ponto $P \in S_1$ e uma função $f : S_1 \rightarrow S_2$ para a qual queremos que exista uma diferencial em P , que repre- sentaremos por df_P . Esta diferencial deve ser uma aplicação linear que dê uma aproximação da variação de f quando o argumento se afasta “pouco” de P . Re- pare que acabámos de encontrar uma estrutura linear (o espaço tangente) que

¹⁷Alguns autores falam em *derivada (global ou total)*, em vez de *diferencial*. Para que não restem dúvidas: dada uma função $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e dado um ponto $P \in \dot{U}$, chamamos aqui *diferencial* de f em P à aplicação linear $df_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\|f(P+H) - f(P) - df_P(H)\|}{\|H\|} = 0$ (se essa aplicação existir).

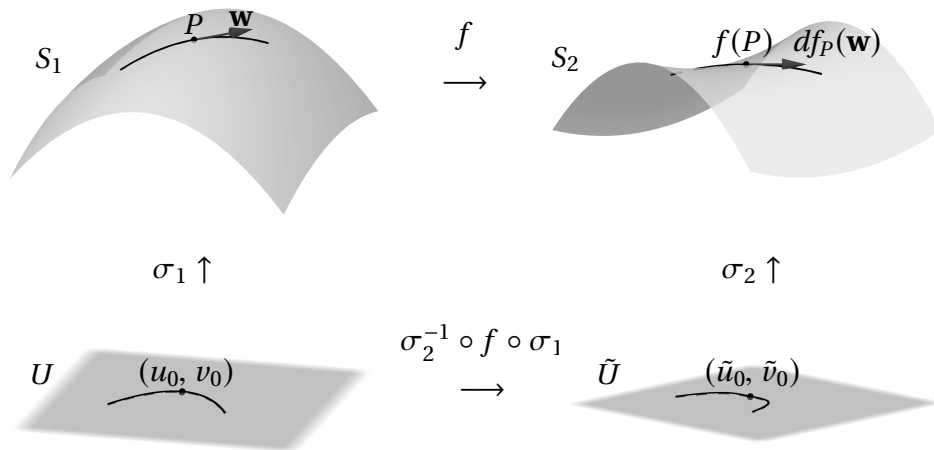
aproxima localmente a superfície. Vamos utilizá-la: se Q for um ponto de S_1 “muito próximo” de P , o vector \overrightarrow{PQ} poderá ser aproximado por um vector $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{S_1}(P)$ e o vector $\overrightarrow{f(P)f(Q)}$ por um vector de $\mathcal{T}_{S_2}(f(P))$, que deverá ser $df_P(\mathbf{w})$; assim, a diferencial de f em P será uma aplicação $df_P : \mathcal{T}_{S_1}(P) \rightarrow \mathcal{T}_{S_2}(f(P))$.

Mas como calcular $df_P(\mathbf{w})$? Pela definição de $\mathcal{T}_{S_1}(P)$, $\mathbf{w} = \gamma'(t_0)$, onde γ é uma parametrização de alguma curva em S_1 tal que $\gamma(t_0) = P$; $df_P(\mathbf{w})$, por sua vez, é a derivada de uma parametrização de curva em S_2 , relativa ao ponto $f(P)$; vamos tomar $f \circ \gamma$ (que obviamente toma valores em S_2), assumindo que se trata de uma parametrização de curva¹⁸: repare que se Q se aproximar de P ao longo da imagem de γ , e desde que f “se porte bem”, $f(Q)$ aproximar-se-á de $f(P)$ ao longo da imagem de $f \circ \gamma$ e, tal como $\mathbf{w} = \gamma'(t_0)$ será o limite de \overrightarrow{PQ} , $(f \circ \gamma)'(t_0)$ será o limite de $\overrightarrow{f(P)f(Q)}$.

Como garantir que $f \circ \gamma$ é uma parametrização de curva e, em particular, que este limite $(f \circ \gamma)'(t_0)$ existe? Sejam $\sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\sigma_2 : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizações locais de S_1 e S_2 , respectivamente, com $P = \sigma_1(u_0, v_0)$ e $f(P) = \sigma_2(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$. Já sabemos que $\sigma_1^{-1} \circ \gamma$ é uma parametrização de curva em $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e, em particular, é C^∞ ; se $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ for C^∞ , $(\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ (\sigma_1^{-1} \circ \gamma)$ também será; assim,

$$f \circ \gamma = \sigma_2 \circ (\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ (\sigma_1^{-1} \circ \gamma)$$

será C^∞ , logo parametrização de curva. Então, basta que $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ seja C^∞ .



¹⁸Não necessariamente regular, pois pode acontecer que df_P seja nula.

Esta condição dependerá das parametrizações σ_1, σ_2 escolhidas? Não: se $\tilde{\sigma}_1$ e $\tilde{\sigma}_2$ forem reparametrizações de σ_1 e σ_2 , respectivamente, $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2$ e $\sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1$ serão difeomorfismos C^∞ e portanto será equivalente pedir que $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ ou que $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 = (\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2) \circ (\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ (\sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1)$ seja C^∞ .

Para funções entre superfícies vamos usar o adjectivo “diferenciável” com o significado de “de classe C^∞ ”.

Definição 2.9. Sejam S_1 e S_2 superfícies e P um ponto de S_1 . Uma função $f : S_1 \rightarrow S_2$ diz-se *diferenciável* (C^∞) em P se, dadas parametrizações locais σ_1 e σ_2 de S_1 e S_2 , com $P = \sigma_1(u_0, v_0)$ e $f(P) = \sigma_2(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$, a função $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ for diferenciável em (u_0, v_0) .

A função $f : S_1 \rightarrow S_2$ diz-se *diferenciável* (C^∞) se for diferenciável em todos os pontos de S_1 .

Para podermos definir $df_P(\mathbf{w})$ como $(f \circ \gamma)'(t_0)$, falta vermos que a escolha particular de γ é irrelevante: se escolhermos outra parametrização de curva α nas mesmas condições (isto é, $\alpha(s_0) = P$ e $\alpha'(s_0) = \mathbf{w}$) teremos o mesmo resultado (isto é, $(f \circ \alpha)'(s_0) = (f \circ \gamma)'(t_0)$). De facto, já sabemos que

$$\mathbf{w} = \gamma'(t_0) = \alpha'(s_0) = \sigma_{1u}(u_0, v_0) a + \sigma_{1v}(u_0, v_0) b$$

para alguns $a, b \in \mathbb{R}$; se escrevermos

$$\gamma(t) = \sigma_1(u_\gamma(t), v_\gamma(t)) \quad \text{e} \quad \alpha(s) = \sigma_1(u_\alpha(s), v_\alpha(s))$$

será

$$u'_\gamma(t_0) = a = u'_\alpha(s_0) \quad \text{e} \quad v'_\gamma(t_0) = b = v'_\alpha(s_0)$$

isto é, duas parametrizações de curva em U cujas imagens por σ_1 tenham a mesma derivada nos valores correspondentes a P têm elas próprias a mesma derivada nesses valores. Repare agora que

$$(f \circ \gamma)(t) = (f \circ \sigma_1)(u_\gamma(t), v_\gamma(t)) = (\sigma_2 \circ \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1)(u_\gamma(t), v_\gamma(t));$$

escrevendo $\tilde{f} = \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$, para tornar a notação menos pesada,

$$(f \circ \gamma)(t) = (\sigma_2 \circ \tilde{f})(u_\gamma(t), v_\gamma(t));$$

chamando \tilde{u}, \tilde{v} aos parâmetros de σ_2 e pondo $\tilde{f}(u, v) = (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$ temos, pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t_0) &= \sigma_{2\tilde{u}}(\tilde{u}_u u'_\gamma(t_0) + \tilde{u}_v v'_\gamma(t_0)) + \sigma_{2\tilde{v}}(\tilde{v}_u u'_\gamma(t_0) + \tilde{v}_v v'_\gamma(t_0)) \\ &= \sigma_{2\tilde{u}}(\tilde{u}_u a + \tilde{u}_v b) + \sigma_{2\tilde{v}}(\tilde{v}_u a + \tilde{v}_v b) \end{aligned}$$

($\sigma_{2\tilde{u}}$ e $\sigma_{2\tilde{v}}$ calculadas em $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = \tilde{f}(u_0, v_0)$; $\tilde{u}_u, \tilde{u}_v, \tilde{v}_u$ e \tilde{v}_v calculadas em (u_0, v_0)), o que mostra que $(f \circ \gamma)'(t_0)$ depende de a e b mas não de γ . Repare ainda que a última igualdade diz que o vector $(f \circ \gamma)'(t_0) \in \mathcal{T}_{S_2}(f(P))$ tem, na base $(\sigma_{2\tilde{u}}, \sigma_{2\tilde{v}})$, coordenadas

$$(\tilde{u}_u a + \tilde{u}_v b, \tilde{v}_u a + \tilde{v}_v b) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_u & \tilde{u}_v \\ \tilde{v}_u & \tilde{v}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = J_{\tilde{f}}(u_0, v_0) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

sendo (a, b) as coordenadas de $\mathbf{w} = \gamma'(t_0)$ na base $(\sigma_{1u}, \sigma_{1v})$.

Definição 2.10. Sejam S_1 e S_2 superfícies e $f : S_1 \rightarrow S_2$ uma função diferenciável em $P \in S_1$. A *diferencial* de f em P é a aplicação

$$\begin{aligned} df_P : \mathcal{T}_{S_1}(P) &\rightarrow \mathcal{T}_{S_2}(f(P)) \\ \mathbf{w} &\mapsto (f \circ \gamma)'(t_0) \end{aligned}$$

onde γ é alguma parametrização de curva em S_1 tal que $\gamma(t_0) = P$ e $\gamma'(t_0) = \mathbf{w}$.

A discussão acima mostra que df_P é uma aplicação linear cuja matriz, relativamente às bases $(\sigma_{1u}(u_0, v_0), \sigma_{1v}(u_0, v_0))$ de $\mathcal{T}_{S_1}(P)$ e $(\sigma_{2\tilde{u}}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0), \sigma_{2\tilde{v}}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))$ de $\mathcal{T}_{S_2}(f(P))$, é a matriz jacobiana de $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ em (u_0, v_0) .

Voltemos a aspectos mais puramente geométricos. Um subespaço vectorial de \mathbb{R}^3 de dimensão 2 (ou, mais geralmente, um hiperplano vectorial de um espaço de dimensão n) fica completamente determinado por um vector ortogonal. Assim, analogamente ao vector tangente unitário a uma curva, que é

suficiente para determinar a recta tangente, definimos vector normal unitário a uma superfície, suficiente para determinar o plano tangente:

Definição 2.11. Dadas uma superfície S , um ponto $P \in S$, e uma parametrização (local) σ de S , com $P = \sigma(u_0, v_0)$, o *vector normal unitário* em P , que representaremos por $N_\sigma(P)$, é o vector

$$\frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$$

(σ_u e σ_v calculadas em (u_0, v_0)).

Assim, o plano tangente $P + \mathcal{T}_S(P) = P + \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$ pode ser escrito também como $P + \langle N_\sigma(P) \rangle^\perp$.

Mas o vector tangente unitário é particularmente útil para caracterizar a orientação das superfícies. Se $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$ for localmente uma reparametrização de σ , será

$$N_{\tilde{\sigma}}(P) = \frac{\tilde{\sigma}_u \times \tilde{\sigma}_v}{\|\tilde{\sigma}_u \times \tilde{\sigma}_v\|} = \frac{Jac \Phi (\sigma_u \times \sigma_v)}{\|Jac \Phi (\sigma_u \times \sigma_v)\|} = \frac{Jac \Phi}{\|Jac \Phi\|} N_\sigma(P),$$

ou seja,

$$N_{\tilde{\sigma}}(P) = N_\sigma(P) \quad \text{se} \quad Jac \Phi > 0$$

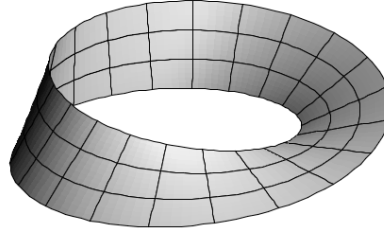
e

$$N_{\tilde{\sigma}}(P) = -N_\sigma(P) \quad \text{se} \quad Jac \Phi < 0.$$

Definição 2.12. Uma superfície diz-se *orientável* se tiver um atlas \mathcal{A} tal que, para todas as parametrizações $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ em \mathcal{A} , para as quais $\sigma(U) \cap \tilde{\sigma}(\tilde{U}) \neq \emptyset$, se verifica $Jac(\sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}) > 0$.

Com um atlas nestas condições, tem-se $N_\sigma = N_{\tilde{\sigma}}$ em $\sigma(U) \cap \tilde{\sigma}(\tilde{U})$. Assim, se S for orientável, pode definir-se em S uma função *contínua* N_S que a cada P faz corresponder um vector unitário $N_S(P)$ normal a S .¹⁹ O exemplo típico de uma superfície não orientável é a *fita*, ou *tira, de Möbius*; sem detalhes técnicos, esta superfície resulta de “colar” dois lados opostos de um rectângulo, depois de o “torcer”; está representada na figura seguinte.

¹⁹Se S não for orientável, pode definir-se uma função que a cada $P \in S$ faz corresponder um vector unitário $N_S(P)$ normal a S , mas essa função não será contínua.



De qualquer forma, repare que qualquer porção de superfície é orientável: tem um atlas composto por uma só parametrização.

Definição 2.13. Uma *superfície orientada* é uma superfície orientável S na qual está escolhida uma função N_S , que a cada $P \in S$ faz corresponder um vector $N_S(P)$ unitário, ortogonal a $\mathcal{T}_S(P)$.

Não havendo perigo de ambiguidade, escreveremos N em vez de N_S .

Exemplo 2.16. Considere a esfera \mathbb{S}^2 com o atlas do exemplo 2.10. As contas do exemplo 2.12 dão-nos

$$N_{\sigma_1} = \frac{\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right\|} = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) = \sigma_1(u, v)$$

e

$$N_{\sigma_2} = \frac{\frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \right\|} = (-\cos u \cos v, \sin v, \sin u \cos v) = \sigma_2(u, v)$$

o que significa que, no caso particular de \mathbb{S}^2 , podemos definir uma orientação pela função $N_{\mathbb{S}^2}$ tal que $N_{\mathbb{S}^2}(x, y, z) = (x, y, z)$; e, naturalmente, outra orientação pela função $\tilde{N}_{\mathbb{S}^2}$ tal que $\tilde{N}_{\mathbb{S}^2}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$.

Resta dizer que é habitual chamar *aplicação de Gauss* à função $P \mapsto N(P)$; e notar que, identificando os vectores unitários do espaço vectorial \mathbb{R}^3 com os pontos do espaço afim \mathbb{R}^3 cuja distância à origem é 1, a aplicação de Gauss é uma aplicação

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2.$$

2.3 Primeira forma fundamental; comprimento e área

Seja γ uma parametrização de uma curva numa superfície S . O comprimento da curva parametrizada por γ entre $t = t_0$ e $t = t_1$ é

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} dt;$$

ora, para cada t , $\gamma'(t)$ é um vector do espaço vectorial $\mathcal{T}_S(\gamma(t))$; vamos examinar a função que a cada $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_S(P)$ faz corresponder $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$, uma função muito útil em vários problemas métricos.

Definição 2.14. Sejam S uma superfície e $P \in S$; a *Primeira Forma Fundamental* de S em P é a função

$$\begin{aligned} I_{S,P} : \mathcal{T}_S(P) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{w} &\mapsto \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

Se não houver perigo de ambiguidade, escreveremos normalmente I_S , I_P ou simplesmente I em vez de $I_{S,P}$.

Seja $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização (local) de S , com $P = \sigma(u_0, v_0)$, e $t \mapsto \gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ uma parametrização de curva em S tal que $P = \gamma(t_0)$ e $\mathbf{w} = \gamma'(t_0) = \sigma_u(u_0, v_0) u'(t_0) + \sigma_v(u_0, v_0) v'(t_0)$; então (omitindo os valores dos parâmetros)

$$I_{S,P}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \gamma' \cdot \gamma' = (\sigma_u \cdot \sigma_u) u'^2 + 2(\sigma_u \cdot \sigma_v) u'v' + (\sigma_v \cdot \sigma_v) v'^2.$$

Costuma-se usar a seguinte notação:

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u \quad F = \sigma_u \cdot \sigma_v \quad G = \sigma_v \cdot \sigma_v,$$

de forma que

$$I_{S,P}(\sigma_u u' + \sigma_v v') = E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2$$

e o comprimento da curva parametrizada por γ entre $t = t_0$ e $t = t_1$ é

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt.$$

$E = \sigma_u \cdot \sigma_u$, $F = \sigma_u \cdot \sigma_v$ e $G = \sigma_v \cdot \sigma_v$ são os *coeficientes* da primeira forma fundamental de S , relativamente à parametrização σ .

A primeira forma fundamental é obviamente invariante por reparametrização, mas os coeficientes E , F e G não são. Por vezes, em vez ou para além de $I_{S,P}$, considera-se a Primeira Forma Fundamental de σ em $(u_0, v_0) \in U$

$$\begin{aligned} I_\sigma : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto Ea^2 + 2Fab + Gb^2; \end{aligned}$$

mas estes (a, b) destinam-se a ser interpretados como coordenadas de vectores de $\mathcal{T}_S(\sigma(u_0, v_0))$ na base (σ_u, σ_v) .

Repare que

$$I_S(\sigma_u a + \sigma_v b) = I_\sigma(a, b) = (a \ b) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Representamos por \mathcal{F}_{I_σ} a matriz $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ de I_σ , de forma que, se $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

$$I_S(\sigma_u a + \sigma_v b) = I_\sigma(a, b) = A^T \mathcal{F}_{I_\sigma} A.$$

Se não houver perigo de ambiguidade, omitiremos também o índice σ , escrevendo $I(a, b) = A^T \mathcal{F}_I A$.

Se $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$ for (localmente) uma reparametrização de σ , a matriz da sua primeira forma fundamental será

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = (J\Phi)^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J\Phi,$$

ou seja,

$$\mathcal{F}_{I_{\tilde{\sigma}}} = (J\Phi)^T \mathcal{F}_{I_\sigma} J\Phi.$$

Como

$$(\sigma_u \cdot \sigma_v)^2 = \|\sigma_u\|^2 \|\sigma_v\|^2 \cos^2 \angle \{\sigma_u, \sigma_v\}$$

e

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 = \|\sigma_u\|^2 \|\sigma_v\|^2 \sin^2 \angle \{\sigma_u, \sigma_v\},$$

temos que

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 + (\sigma_u \cdot \sigma_v)^2 = \|\sigma_u\|^2 \|\sigma_v\|^2,$$

ou seja, $\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 + F^2 = EG$, e portanto

$$\det \mathcal{F}_1 = EG - F^2 = \|\sigma_u \times \sigma_v\|^2.$$

Foi dito acima que a primeira forma fundamental é útil em diversos problemas métricos — isto porque contém toda a informação sobre o produto interno em $\mathcal{T}_S(P)$; de facto, como

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + 2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$

temos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}{2}$$

e portanto, sendo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{T}_S(P)$,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{I(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - I(\mathbf{v}) - I(\mathbf{w})}{2}.$$

Assim, por exemplo, se quisermos calcular o ângulo entre duas curvas em S — digamos, parametrizadas por α e β — que se encontram no ponto $P = \alpha(t_0) = \beta(s_0)$ (e que se define como o ângulo entre os vectores tangentes a essas curvas, ou seja, entre $\alpha'(t_0)$ e $\beta'(s_0)$, que representaremos por \mathbf{v} e \mathbf{w}) podemos simplesmente calcular

$$\cos \angle \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} = \frac{I(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - I(\mathbf{v}) - I(\mathbf{w})}{2\sqrt{I(\mathbf{v})}\sqrt{I(\mathbf{w})}}.$$

Vamos agora calcular a área de uma porção de superfície. Analogamente ao que fizemos para comprimento de curvas, começamos por considerar uma

aproximação; e tal como então aproximámos esse comprimento por uma soma de comprimentos de segmentos de recta, agora aproximaremos esta área por uma soma de áreas de paralelogramos. Seja então σ uma parametrização da porção de superfície, e consideremos quatro pontos dessa porção, da forma $\sigma(u_0, v_0)$, $\sigma(u_0 + h, v_0)$, $\sigma(u_0, v_0 + k)$ e $\sigma(u_0 + h, v_0 + k)$ (ou seja, tais que os seus parâmetros são os vértices do rectângulo $[u_0, u_0 + h] \times [v_0, v_0 + k]$ ²⁰); se os números $|h|$, $|k|$ forem “muito pequenos”, esses pontos estarão próximos de ser os vértices de um paralelogramo²¹, cuja área será uma aproximação da área de $\sigma([u_0, u_0 + h] \times [v_0, v_0 + k])$ ²²; mas a área de um paralelogramo cujos lados são (segmentos associados a) os vectores \mathbf{v} , \mathbf{w} é $\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cdot \sin \angle\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ logo, neste caso, a área do paralelogramo será

$$\begin{aligned} & \|(\sigma(u_0 + h, v_0) - \sigma(u_0, v_0)) \times (\sigma(u_0, v_0 + k) - \sigma(u_0, v_0))\| \\ &= \left\| \frac{\sigma(u_0 + h, v_0) - \sigma(u_0, v_0)}{h} \times \frac{\sigma(u_0, v_0 + k) - \sigma(u_0, v_0)}{k} \right\| |h| |k|. \end{aligned}$$

A nossa aproximação da área da porção de superfície será assim uma soma de parcelas desta forma. Ora, como

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left\| \frac{\sigma(u_0 + h, v_0) - \sigma(u_0, v_0)}{h} \times \frac{\sigma(u_0, v_0 + k) - \sigma(u_0, v_0)}{k} \right\| = \|\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)\|,$$

o limite $((h, k) \rightarrow (0, 0))$ dessa aproximação será

$$\iint_U \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv$$

(onde U é o domínio de σ).

Ainda como no caso do comprimento de curvas, este argumento não pretende demonstrar nada, mas apenas motivar a seguinte definição de área de

²⁰Ou, no caso de $h < 0$, do rectângulo $[u_0 + h, u_0] \times [v_0, v_0 + k]$, ou ...

²¹Dois dos “lados” desse quase paralelogramo são o segmento que une $\sigma(u_0, v_0)$ a $\sigma(u_0 + h, v_0)$ e o segmento que une $\sigma(u_0, v_0 + k)$ a $\sigma(u_0 + h, v_0 + k)$; mas esses segmentos são “quase congruentes”, ou seja, os vectores correspondentes são “quase iguais”: $\sigma(u_0 + h, v_0 + k) - \sigma(u_0, v_0 + k) \approx h \sigma_u(u_0, v_0 + k) \approx h \sigma_u(u_0, v_0) \approx \sigma(u_0 + h, v_0) - \sigma(u_0, v_0)$. Analogamente, os segmentos que unem $\sigma(u_0, v_0)$ a $\sigma(u_0, v_0 + k)$ e $\sigma(u_0 + h, v_0)$ a $\sigma(u_0 + h, v_0 + k)$ são “quase congruentes”.

²²Ver a nota 20.

uma porção de superfície:

Definição 2.15. Seja $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de superfície. Se o integral

$$\iint_U \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv$$

for convergente, dizemos que é a *área* da porção de superfície $\sigma(U)$.

O exemplo mais simples de uma porção de superfície que não tem área definida por o respectivo integral ser divergente é um plano.

Mas, existindo, a área de uma porção de superfície assim definida é invariante por reparametrização: se $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ for uma reparametrização de σ e $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$,

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{U}} \|\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}\| d\tilde{u} d\tilde{v} &= \iint_{\tilde{U}} \|\sigma_u \times \sigma_v\| |Jac \Phi| d\tilde{u} d\tilde{v} \\ &= \iint_{\Phi(\tilde{U})} \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv = \iint_U \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv. \end{aligned}$$

Note-se também que esta definição é consistente com o cálculo já conhecido da área de figuras planas: uma figura plana $D \subseteq \mathbb{R}^2$ pode ser identificada com o conjunto $D \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ que (desde que D seja aberta) pode ser parametrizado por $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $\sigma(u, v) = (u, v, 0)$; como neste caso $\sigma_u \times \sigma_v = (0, 0, 1)$, a área de D é, como esperado, $\iint_D 1 du dv$.

Na prática, podemos aplicar a definição 2.15 ao cálculo da área de uma superfície que não seja simplesmente uma porção de superfície: se uma superfície S for a reunião de várias porções de superfície disjuntas (tipicamente reunidas com os traços de algumas curvas), a área de S será a soma das áreas dessas porções (as curvas não contribuem para a área total).

Exemplo 2.17. A área de \mathbb{S}^2 é igual à área de

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ e } x^2 + z^2 = 1\},$$

que é (usando a parametrização σ_1 do exemplo 2.10)

$$\iint_{]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \left\| \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right\| du dv = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv du = 4\pi.$$

2.4 Difeomorfismos e isometrias

Já vimos, na secção 2.2, a extensão da noção de classe C^∞ a funções entre superfícies. A extensão da noção de difeomorfismo C^∞ é óbvia:

Definição 2.16. Sejam S_1 e S_2 superfícies. Uma função $f : S_1 \rightarrow S_2$ diz-se um *difeomorfismo* (C^∞) se for bijectiva e diferenciável (C^∞) e a sua inversa for também diferenciável (C^∞).

Analogamente ao que fazemos com o adjectivo “diferenciável”, vamos usar a palavra “difeomorfismo” com o significado de “difeomorfismo C^∞ ”.

Por vezes interessa-nos uma propriedade mais fraca:

Definição 2.17. Sejam S_1 e S_2 superfícies. Uma função $f : S_1 \rightarrow S_2$ diz-se um *difeomorfismo local* se, para todo o $P \in S_1$, existe uma vizinhança V de P tal que $f|_{V \cap S_1} : V \cap S_1 \rightarrow f(V \cap S_1)$ é um difeomorfismo entre superfícies.

Exemplo 2.18. Sejam $S_1 = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ (o plano yz) e $S_2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (cilindro de base \mathbb{S}^1). A função

$$\begin{aligned} f : S_1 &\rightarrow S_2 \\ (0, y, z) &\mapsto (\cos y, \sin y, z) \end{aligned}$$

não é um difeomorfismo porque S_1 e S_2 não são sequer homeomorfos; no entanto, é um difeomorfismo local (exercício; para S_1 utilize a parametrização óbvia e para S_2 o atlas $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ do exemplo 2.11).

Vamos agora relacionar propriedades da diferencial de uma função entre superfícies com a possibilidade de essa função ser um difeomorfismo ou um difeomorfismo local.

Proposição 2.2. 1. Se S é uma superfície e $P \in S$,

$$d(\text{Id}_S)_P = \text{Id}_{\mathcal{T}_S(P)}$$

(ou seja, a diferencial em P da função identidade em S é a função identidade em $\mathcal{T}_S(P)$).

2. Se S_1, S_2 e S_3 são superfícies e $f : S_1 \rightarrow S_2$ e $g : S_2 \rightarrow S_3$ são diferenciáveis então, para todo o $P \in S_1$,

$$d(g \circ f)_P = dg_{f(P)} \circ df_P.$$

3. Se $f : S_1 \rightarrow S_2$ é um difeomorfismo então, para todo o $P \in S_1$, a aplicação linear $df_P : \mathcal{T}_{S_1}(P) \rightarrow \mathcal{T}_{S_2}(f(P))$ é invertível.

Demonstração. 1. Aplicação imediata da definição 2.10.

2. Sejam $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_S(P)$ e γ uma parametrização de curva em S_1 tal que $\gamma(0) = P$ e $\gamma'(0) = \mathbf{w}$; então, pela definição 2.10, $f \circ \gamma$ é uma parametrização de curva em S_2 tal que $(f \circ \gamma)(0) = f(P)$ e $(f \circ \gamma)'(0) = df_P(\mathbf{w})$ e portanto

$$(dg_{f(P)} \circ df_P)(\mathbf{w}) = dg_{f(P)}(df_P(\mathbf{w})) = (g \circ f \circ \gamma)'(0) = d(g \circ f)_P(\mathbf{w}).$$

3. Por 1.,

$$d(f^{-1} \circ f)_P = d(Id_{S_1})_P = Id_{\mathcal{T}_{S_1}(P)}$$

e

$$d(f \circ f^{-1})_{f(P)} = d(Id_{S_2})_{f(P)} = Id_{\mathcal{T}_{S_2}(f(P))};$$

por 2.,

$$d(f^{-1} \circ f)_P = d(f^{-1})_{f(P)} \circ df_P$$

e

$$d(f \circ f^{-1})_{f(P)} = df_{f^{-1}(f(P))} \circ d(f^{-1})_{f(P)} = df_P \circ d(f^{-1})_{f(P)};$$

logo, $d(f^{-1})_{f(P)}$ é a inversa de df_P . □

Proposição 2.3. Sejam S_1 e S_2 superfícies e $f : S_1 \rightarrow S_2$ uma função diferenciável. Então f é um difeomorfismo local se e só se, para todo o $P \in S_1$, a aplicação linear $df_P : \mathcal{T}_{S_1}(P) \rightarrow \mathcal{T}_{S_2}(f(P))$ é invertível.

Demonstração. Suponhamos que f é um difeomorfismo local e seja $P \in S_1$; então existe uma vizinhança V de P tal que $f|_{V \cap S_1} : V \cap S_1 \rightarrow f(V \cap S_1)$ é um difeomorfismo entre superfícies; assim, pelo ponto 3. da proposição 2.2, $df_P :$

$\mathcal{T}_{V \cap S_1}(P) \rightarrow \mathcal{T}_{f(V \cap S_1)}(f(P))$ é invertível; mas $\mathcal{T}_{V \cap S_1}(P) = \mathcal{T}_{S_1}(P)$ e $\mathcal{T}_{f(V \cap S_1)}(f(P)) = \mathcal{T}_{S_2}(f(P))$.

Reciprocamente, suponhamos que $P \in S_1$ e $df_P : \mathcal{T}_{S_1}(P) \rightarrow \mathcal{T}_{S_2}(f(P))$ é invertível. Sejam $\sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\sigma_2 : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizações locais de S_1 e S_2 , com $P = \sigma_1(u_0, v_0)$ e $f(P) = \sigma_2(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$. Então a matriz de df_P (numa base apropriada) é a matriz jacobiana de $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ e, como a primeira é invertível, podemos aplicar o Teorema da Função Inversa à segunda e concluir que, para uma certa vizinhança W de (u_0, v_0) , a função $(\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1)|_W$ é um difeomorfismo. Mas isto significa que $f|_{\sigma_1(W)} : \sigma_1(W) \rightarrow f(\sigma_1(W))$ é um difeomorfismo entre superfícies. Assim, concluímos que f é um difeomorfismo local. \square

Proposição 2.4. *Sejam S_1 e S_2 superfícies e $F : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função C^∞ tal que $F(S_1) \subseteq S_2$ e, para todo o $P \in S_1$, $Jac F_P \neq 0$. Então $f = F|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$ é um difeomorfismo local.*

Demonstração. Seja $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização local de S_1 com $P = \sigma(u_0, v_0)$. Por ser $Jac F_P \neq 0$, e pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança aberta V de P tal que $F|_V$ é bijetiva e $(F|_V)^{-1}$ é C^∞ ; chamemos T a $\sigma^{-1}(V \cap S_1)$. Então $f \circ \sigma|_T = F \circ \sigma|_T : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe C^∞ por ser a composta de duas funções C^∞ , é injectiva por ser a composta de duas funções injectivas e $(f \circ \sigma|_T)^{-1} = (\sigma|_T)^{-1} \circ (F|_{\sigma(T)})^{-1}$ é contínua por ser a composta de duas funções contínuas; assim, é um homeomorfismo sobre a sua imagem; o seu domínio T é aberto; e a sua imagem está contida em S_2 ; é portanto uma parametrização local de S_2 , com $f(P) = (f \circ \sigma)(u_0, v_0)$. Então f é diferenciável por $(f \circ \sigma)^{-1} \circ f \circ \sigma|_T = Id_T$ ser diferenciável; além disso, isto indica que a matriz de df_P , numa determinada base, é a matriz identidade, logo df_P é invertível, para todo o $P \in S_1$. \square

Exemplo 2.19. A função f do exemplo 2.18 é a restrição a S_1 da função

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto ((x+1) \cos y, (x+1) \sin y, z) \end{aligned}$$

que é claramente C^∞ . Além disso,

$$Jac F = \begin{vmatrix} \cos y & -(x+1)\sin y & 0 \\ \sin y & (x+1)\cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x+1$$

e portanto, se $P \in S_1$, $Jac F_P = 1$. Assim, confirmamos que f é um difeomorfismo local.

Nota Mais geralmente prova-se que, se $F : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é C^∞ e $F(S_1) \subseteq S_2$, então $f = F|_{S_1}$ é uma função diferenciável (C^∞) entre superfícies.

Vamos agora estudar funções entre superfícies que mantêm a estrutura métrica — lembrando que a estrutura métrica de uma superfície, pelo menos localmente, é expressa pela primeira forma fundamental.

Definição 2.18. Sejam S_1 e S_2 superfícies. Uma função diferenciável $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma *isometria local* se, para todo o $P \in S_1$ e para todo o $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{S_1}(P)$,

$$I_{S_1,P}(\mathbf{w}) = I_{S_2,f(P)}(df_P(\mathbf{w})).$$

Pelo que vimos na secção anterior, é claro que se f for uma isometria local e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{T}_{S_1}(P)$,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = df_P(\mathbf{v}) \cdot df_P(\mathbf{w}).$$

Proposição 2.5. Sejam S_1 e S_2 superfícies e $f : S_1 \rightarrow S_2$ uma isometria local. Então f é um difeomorfismo local.

Demonstração. Seja $P \in S_1$. Se a aplicação linear df_P não fosse invertível, existiria um $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{S_1}(P)$ tal que $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ e $df_P(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$; mas isso significaria $I_{S_1,P}(\mathbf{w}) \neq 0 = I_{S_2,f(P)}(df_P(\mathbf{w}))$, o que contraria a hipótese de f ser uma isometria local. Logo, df_P é invertível e portanto f é um difeomorfismo local. \square

Definição 2.19. Sejam S_1 e S_2 superfícies. Uma aplicação $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma *isometria* se é um difeomorfismo e uma isometria local.

Lema 2.6. *Sejam S_1 e S_2 superfícies, $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização local de S_1 e $f : S_1 \rightarrow S_2$ um difeomorfismo. Então $f \circ \sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização local de S_2 .*

Demonstração. A função $f \circ \sigma$ é injectiva por ser a composta de duas funções injectivas; é também C^∞ por ser a composta de duas funções C^∞ ; a sua inversa $(f \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ f^{-1}$ é contínua, por ser a composta de duas funções contínuas; assim, $f \circ \sigma$ é um homeomorfismo C^∞ sobre a sua imagem e essa imagem está contida em S_2 . \square

Nota Se $f : S_1 \rightarrow S_2$ for difeomorfismo local mas não injectiva, $f \circ \sigma$ poderá não ser parametrização por também não ser injectiva (dependendo de $f|_{\sigma(U)}$ ser ou não injectiva); mas se nos restringirmos a cada uma das vizinhanças V em que f é difeomorfismo, e portanto injectiva, teremos diversas parametrizações locais $f \circ \sigma|_{\sigma^{-1}(V \cap S_1)}$ de S_2 .

Proposição 2.7. *Sejam S_1 e S_2 superfícies. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria se e só se, para todo o $P \in S_1$, os coeficientes da primeira forma fundamental de S_1 em P , relativamente a uma qualquer parametrização local σ , forem iguais aos coeficientes da primeira forma fundamental de S_2 em $f(P)$, relativamente à parametrização local $f \circ \sigma$.*

Demonstração. A matriz jacobiana de f em cada P , tomando (σ_u, σ_v) para base de $\mathcal{T}_{S_1}(P)$ e $((f \circ \sigma)_u, (f \circ \sigma)_v)$ para base de $\mathcal{T}_{S_2}(f(P))$, é a matriz identidade: basta notar que $(f \circ \sigma)^{-1} \circ f \circ \sigma$ é a aplicação identidade.

Então, se

$$\mathbf{w} = \sigma_u a + \sigma_v b \in \mathcal{T}_{S_1}(P),$$

temos

$$df_P(\mathbf{w}) = (f \circ \sigma)_u a + (f \circ \sigma)_v b.$$

Ora, se os coeficientes das primeiras formas fundamentais forem iguais, teremos então

$$I_{S_1, P}(\mathbf{w}) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 = I_{S_2, f(P)}(df_P(\mathbf{w}))$$

e portanto f é uma isometria local; sendo um difeomorfismo, é uma isometria.

Reciprocamente, se f for uma isometria, e chamando E_1, F_1, G_1 aos coeficientes da primeira forma fundamental de S_1 relativamente a σ e E_2, F_2, G_2 aos coeficientes da primeira forma fundamental de S_2 relativamente a $f \circ \sigma$,

$$\begin{aligned} E_1 &= I_{S_1, P}(\sigma_u 1 + \sigma_v 0) = I_{S_2, P}((f \circ \sigma)_u 1 + (f \circ \sigma)_v 0) = E_2, \\ F_1 &= \frac{I_{S_1, P}(\sigma_u 1 + \sigma_v 1) - I_{S_1, P}(\sigma_u 1 + \sigma_v 0) - I_{S_1, P}(\sigma_u 0 + \sigma_v 1)}{2} = \\ &= \frac{I_{S_2, f(P)}(\sigma_u 1 + \sigma_v 1) - I_{S_2, f(P)}(\sigma_u 1 + \sigma_v 0) - I_{S_2, f(P)}(\sigma_u 0 + \sigma_v 1)}{2} = F_2 \end{aligned}$$

e

$$G_1 = I_{S_1, P}(\sigma_u 0 + \sigma_v 1) = I_{S_2, P}((f \circ \sigma)_u 0 + (f \circ \sigma)_v 1) = G_2. \quad \square$$

Corolário 2.8. *Um difeomorfismo local $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria local se e só se, para todo o $P \in S_1$, os coeficientes da primeira forma fundamental de S_1 em P , relativamente a uma qualquer parametrização local σ , forem iguais aos coeficientes da primeira forma fundamental de S_2 em $f(P)$, relativamente à parametrização local $f \circ \sigma|_W$, onde W é tal que f é injectiva em $\sigma(W)$ (v. nota ao lema 2.6).*

Exemplo 2.20. Já vimos no exemplo 2.19 que a função f do exemplo 2.18 é um difeomorfismo local (e portanto é diferenciável). Vamos ver que é uma isometria local. Considerando a parametrização óbvia de S_1

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (0, u, v) \end{aligned}$$

a função

$$\begin{aligned} f \circ \sigma : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u, \sin u, v) \end{aligned}$$

não é uma parametrização de S_2 , porque não é injectiva; mas, restringindo o domínio de σ a qualquer intervalo da forma $]a, a + 2\pi[$ ($a \in \mathbb{R}$), $f \circ \sigma|_{]a, a+2\pi[}$ é uma parametrização local de S_2 e os coeficientes das primeiras formas fundamentais de S_1 e S_2 , em pontos P e $f(P)$, relativamente às parametrizações $\sigma|_{]a, a+2\pi[}$ e $f \circ \sigma|_{]a, a+2\pi[}$ são iguais, pois

$$\begin{aligned}
\sigma_u \cdot \sigma_u &= (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0) = 1 = \\
&= (-\sin u, \cos u, 0) \cdot (-\sin u, \cos u, 0) = (f \circ \sigma)_u \cdot (f \circ \sigma)_u \\
\sigma_u \cdot \sigma_v &= (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0 = \\
&= (-\sin u, \cos u, 0) \cdot (0, 0, 1) = (f \circ \sigma)_u \cdot (f \circ \sigma)_v \\
\sigma_v \cdot \sigma_v &= (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1 = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = (f \circ \sigma)_v \cdot (f \circ \sigma)_v.
\end{aligned}$$

Isto significa, nomeadamente, que se tivermos uma curva no plano yz , a sua imagem por f será uma curva no cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ com o mesmo comprimento. Mas para tirar a mesma conclusão sobre os respectivos traços é necessário verificar se f é injectiva no traço da curva inicial: por exemplo, o segmento de recta de extremos $(0, 0, 0)$ e $(0, 3\pi, 3\pi)$, que tem comprimento $3\sqrt{2}\pi$, é enviado no traço da curva parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 3\pi]$ (segmento de uma hélice circular), que tem o mesmo comprimento; mas o segmento de extremos $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, 3\pi)$, de comprimento 3π , é enviado na circunferência $S^1 \times \{0\}$ (com uma semi-circunferência percorrida duas vezes), de perímetro apenas 2π .

2.5 Segunda forma fundamental; curvatura

Nesta secção vamos estudar a curvatura de uma superfície num ponto genérico. Como veremos, é importante considerar que a superfície está orientada — e portanto, aparentemente, devemos limitar-nos a superfícies orientáveis. Mas, como nos interessa a curvatura *num ponto*, podemos antes concentrar-nos apenas numa porção de superfície que inclua esse ponto — e uma porção de superfície é sempre orientável.

No que se segue, S será uma porção de superfície orientada e P um ponto de S . Qualquer parametrização σ de S que consideremos terá de ser compatível com a orientação adoptada (ou seja, terá de ser tal que $N = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$).

Recordemos que a aplicação de Gauss

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

faz corresponder a cada $P \in S$ um vector unitário ortogonal a $\mathcal{T}_S(P)$. A curvatura de S em P estará evidentemente relacionada com a variação de N perto

de P ; é portanto natural considerarmos a diferencial

$$dN_P : \mathcal{T}_S(P) \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}(N(P)).$$

Mas repare que, para todo o $Q \in \mathbb{S}^2$, como $N(Q) = Q$ ou $N(Q) = -Q$ (exemplo 2.16), temos $Q \perp \mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}(Q)$ (isto, claro, identificando o ponto Q com o vector que liga a origem a Q); assim, $N(P) \perp \mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}(N(P))$ e, como também $N(P) \perp \mathcal{T}_S(P)$, os planos vectoriais $\mathcal{T}_S(P)$ e $\mathcal{T}_{\mathbb{S}^2}(N(P))$ são o mesmo, isto é, a diferencial da aplicação de Gauss em P é uma função

$$dN_P : \mathcal{T}_S(P) \rightarrow \mathcal{T}_S(P).$$

A razão para adoptarmos a seguinte definição será vista mais tarde.

Definição 2.20. A *Segunda Forma Fundamental* de S em P é a função

$$\begin{aligned} \Pi_{S,P} : \mathcal{T}_S(P) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{w} &\mapsto -dN_P(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

Se não houver perigo de ambiguidade, escreveremos Π_S , Π_P ou simplesmente Π em vez de $\Pi_{S,P}$.

Para calcularmos $\Pi(\mathbf{w})$, tomemos uma parametrização σ de S , com $P = \sigma(u_0, v_0)$ e uma parametrização γ de uma curva em S tal que $\gamma(0) = P$ e $\gamma'(0) = \mathbf{w}$. Então

$$\Pi(\mathbf{w}) = -(N \circ \gamma)'(0) \cdot \gamma'(0);$$

escrevendo, como já é habitual, $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ e calculando todas as derivadas em 0 ou $(u_0, v_0) = (u(0), v(0))$ temos

$$\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$$

e

$$(N \circ \gamma)' = (N \circ \sigma)_u u' + (N \circ \sigma)_v v'$$

de forma que

$$\begin{aligned}\Pi(\mathbf{w}) &= -((N \circ \sigma)_u u' + (N \circ \sigma)_v v') \cdot (\sigma_u u' + \sigma_v v') = \\ &= -((N \circ \sigma)_u \cdot \sigma_u) u'^2 - ((N \circ \sigma)_u \cdot \sigma_v + (N \circ \sigma)_v \cdot \sigma_u) u' v' - ((N \circ \sigma)_v \cdot \sigma_v) v'^2.\end{aligned}$$

Como $\sigma_u, \sigma_v \in \mathcal{T}_S(P)$ e $(N \circ \sigma)(u_0, v_0) = N(P) \perp \mathcal{T}_S(P)$,

$$(N \circ \sigma) \cdot \sigma_u = 0 \quad \text{e} \quad (N \circ \sigma) \cdot \sigma_v = 0.$$

Derivando estas equações em ordem a u e em ordem a v , obtemos

$$\begin{aligned}(N \circ \sigma)_u \cdot \sigma_u &= -N \cdot \sigma_{uu}; \\ (N \circ \sigma)_v \cdot \sigma_u &= -N \cdot \sigma_{uv} = (N \circ \sigma)_u \cdot \sigma_v; \\ (N \circ \sigma)_v \cdot \sigma_v &= -N \cdot \sigma_{vv}.\end{aligned}$$

Vamos usar a notação:

$$e = N \cdot \sigma_{uu} \quad f = N \cdot \sigma_{uv} \quad g = N \cdot \sigma_{vv},$$

de forma que

$$\Pi(\mathbf{w}) = \Pi(\sigma_u u' + \sigma_v v') = e u'^2 + 2f u' v' + g v'^2$$

(e agora deve ser claro o porquê do sinal – na definição da segunda forma fundamental).

e, f e g são os *coeficientes* da segunda forma fundamental de S , relativamente à parametrização σ .

Tal como acontece com a primeira forma fundamental, é imediato da definição que a segunda forma fundamental é invariante por reparametrização, mas os coeficientes e, f e g não são. Por vezes, em vez ou para além de $\Pi_{S,P}$, considera-se a Segunda Forma Fundamental de $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ em $(u_0, v_0) \in U$

$$\begin{aligned}\Pi_\sigma : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto e a^2 + 2f a b + g b^2;\end{aligned}$$

mas estes (a, b) destinam-se a ser interpretados como coordenadas de vectores de $\mathcal{T}_S(\sigma(u_0, v_0))$ na base (σ_u, σ_v) .

Repare que

$$\Pi_S(\sigma_u a + \sigma_v b) = \Pi_\sigma(a, b) = (a \ b) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Representamos por \mathcal{F}_{Π_σ} a matriz $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ de Π_σ , de forma que, se $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

$$\Pi_S(\sigma_u a + \sigma_v b) = \Pi_\sigma(a, b) = A^T \mathcal{F}_{\Pi_\sigma} A.$$

Se não houver perigo de ambiguidade, omitiremos também o índice σ , escrevendo $\Pi(a, b) = A^T \mathcal{F}_\Pi A$.

Vejamos agora qual o interesse geométrico da segunda forma fundamental.

Definição 2.21. Seja $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_S(P) \setminus \{\mathbf{0}\}$. O *plano normal* a S em P segundo a direcção de \mathbf{w} é o plano

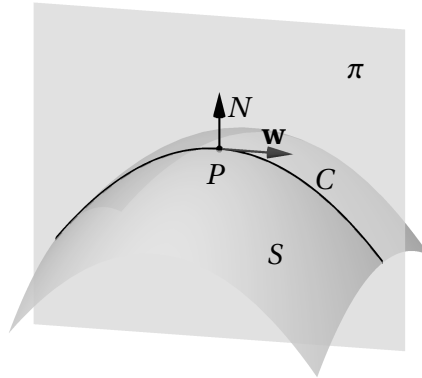
$$P + \langle \mathbf{w}, N \rangle$$

(onde $N = N(P)$ é o vector normal unitário a S em P , correspondente à orientação de S).

Sejam $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_S(P) \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $\pi = P + \langle \mathbf{w}, N \rangle$; existe uma vizinhança V de P tal que $C = \pi \cap S \cap V$ é o traço duma curva²³, a que chamaremos *secção normal* de S em P segundo a direcção de \mathbf{w} . O vector \mathbf{w} , tangente a S em P e no mesmo

²³Consideremos um referencial ortonormado em que a origem das coordenadas é P , o eixo dos x é colinear com \mathbf{w} e o eixo dos z com N ; os planos $P + \mathcal{T}_S(P)$ e π terão equações $z = 0$ e $y = 0$, respectivamente; tomando uma parametrização $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de S neste referencial e calculando as suas derivadas parciais em P , como $\mathcal{T}_S(P)$ tem equação $z = 0$, teremos $\sigma_u = (x_u, y_u, 0)$ e $\sigma_v = (x_v, y_v, 0)$ de forma que, escrevendo $A = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$, $|\det A| = \|\sigma_u \times \sigma_v\| \neq 0$; assim, pelo Teorema da Função Inversa, existirá localmente uma função $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ e compondo-a com σ podemos considerar uma parametrização local $(x, y) \mapsto (x, y, z(x, y))$ de S ; mas a intersecção de S com π é obtida fazendo $y = 0$ e portanto $\gamma(x) = (x, 0, z(x, 0))$ parametriza localmente C .

Por outro lado, repare que a intersecção $\pi \cap S$ não é sempre um traço de curva: por exemplo,



plano que C , será claramente tangente a C em P ;²⁴ além disso, se a curvatura de C não for nula e chamando \mathbf{n} ao vector normal principal de C em P , como o plano osculador será o plano π , teremos $\langle \mathbf{w}, N \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle$ e, como ainda $\mathbf{n} \perp \mathbf{w}$ e $N \perp \mathbf{w}$, concluímos que $\mathbf{n} \parallel N$ e, como estes vectores são unitários, $\mathbf{n} = \pm N$. Recordemos que, se γ for uma parametrização por comprimento de arco de C , e chamando κ_C à curvatura de C , $\gamma'' = \frac{dt}{ds} = \kappa_C \mathbf{n}$.

Definição 2.22. Seja $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_S(P) \setminus \{\mathbf{0}\}$. A *curvatura normal* de S em P segundo a direcção de \mathbf{w} é

$$\kappa_n(\mathbf{w}) = \gamma''(s_0) \cdot N$$

onde γ é uma parametrização por comprimento de arco da secção normal de S em P segundo a direcção de \mathbf{w} , com $\gamma(s_0) = P$.

Ou seja, se a curvatura da secção normal for nula, a curvatura normal da superfície segundo essa direcção é também nula; se não for nula, a curvatura normal da superfície coincide com a curvatura da secção normal no caso de $\mathbf{n} = N$ (pois $\kappa_n(\mathbf{w}) = \gamma'' \cdot N = \kappa_C \mathbf{n} \cdot N = \kappa_C$) ou é igual a esta em módulo, mas negativa, no caso de $\mathbf{n} = -N$ (pois $\kappa_n(\mathbf{w}) = \kappa_C \mathbf{n} \cdot N = -\kappa_C$). A figura a seguir ilustra os casos de curvaturas normais positiva (à esquerda) e negativa (à direita). É claro que se a orientação da superfície for invertida as curvaturas

se S for um cilindro e \mathbf{w} paralelo ao seu eixo, o conjunto $\pi \cap S$ é um par de rectas paralelas (duas directrizes do cilindro).

²⁴Isto é geometricamente claro, mas pode ser verificado analiticamente: nas condições da nota anterior, $\gamma'(x) = (1, 0, z_x(x, 0))$; mas como $\gamma'(0) \in \mathcal{T}_S(P)$ e este plano tem equação $z = 0$, é $z_x(0, 0) = 0$ e $\gamma'(0) = (1, 0, 0)$, ou seja $\gamma'(0)$ é colinear com o eixo dos x e portanto com \mathbf{w} .

normais trocam de sinal.



Sejam σ uma parametrização de S e γ uma parametrização de C por comprimento de arco com $\gamma(s_0) = P$; vamos escrever $\gamma(s) = \sigma(u(s), v(s))$. Será $\gamma'(s_0) = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$ ou $\gamma'(s_0) = -\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$ donde (calculando tudo em s_0 ou $(u(s_0), v(s_0))$) e recordando que N é ortogonal quer a σ_u quer a σ_v)

$$\begin{aligned}
 \kappa_n(\mathbf{w}) &= \gamma'' \cdot N \\
 &= (\sigma_{uu}u'^2 + \sigma_{uv}u'v' + \sigma_u u'' + \sigma_{vu}u'v' + \sigma_{vv}v'^2 + \sigma_v v'') \cdot N \\
 &= (\sigma_{uu} \cdot N) u'^2 + 2(\sigma_{uv} \cdot N) u'v' + (\sigma_{vv} \cdot N) v'^2 \\
 &= \text{II}(\sigma_u u' + \sigma_v v') \\
 &= \text{II}(\gamma') = \text{II}(-\gamma') \\
 &= \text{II}\left(\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right).
 \end{aligned}$$

Se quisermos estudar os possíveis valores da curvatura normal num ponto P , necessitamos apenas de considerar as curvaturas normais segundo os vectores unitários de $\mathcal{T}_S(P)$ (o que não é novidade: as secções normais segundo as direcções \mathbf{w} e $\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$ são evidentemente a mesma). Ora, o conjunto

$$\{\mathbf{w} \in \mathcal{T}_S(P) : \|\mathbf{w}\| = 1\}$$

é fechado e limitado, e κ_n (em P) é uma função real claramente contínua, logo tem um valor máximo e um valor mínimo nesse conjunto (e, pelo que já foi dito, em todo o seu domínio $\mathcal{T}_S(P) \setminus \{\mathbf{0}\}$).

Definição 2.23. Aos valores máximo e mínimo da curvatura normal de S em P chamamos *curvaturas principais* de S em P . Às direcções dos vectores segundo os quais a curvatura normal atinge esses valores extremos chamamos *direcções principais*.

Para calcularmos as curvaturas principais de $S = \sigma(U)$ em $P = \sigma(u_0, v_0)$ podemos aplicar o Método dos Multiplicadores de Lagrange a Π_σ com a condição $\|a\sigma_u + b\sigma_v\| = 1$, que é equivalente a $I_\sigma(a, b) = 1$: se (a, b) for um tal ponto de extremo de Π_σ , verificar-se-á

$$\nabla \Pi_\sigma(a, b) = \lambda \nabla I_\sigma(a, b) \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mas $\nabla \Pi_\sigma(a, b) = (2ea + 2fb, 2fa + 2gb)$ e $\nabla I_\sigma(a, b) = (2Ea + 2Fb, 2Fa + 2Gb)$; assim, as condições a verificar são

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_\sigma(a, b) = 1,$$

ou seja, escrevendo $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{F}_\Pi A = \lambda \mathcal{F}_I A \quad \text{e} \quad A^T \mathcal{F}_I A = 1.$$

A primeira condição pode ainda ser escrita como $(\mathcal{F}_\Pi - \lambda \mathcal{F}_I)A = 0$, ou ainda, já que \mathcal{F}_I é invertível ($\det \mathcal{F}_I = EG - F^2 = \|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 \neq 0$),

$$(\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_\Pi - \lambda I_2) A = 0;$$

isto é, λ será um valor próprio e A um vector próprio de $\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_\Pi$. Mais ainda, a curvatura normal segundo o vector $a\sigma_u + b\sigma_v$ (que, recordemos, será uma curvatura principal) será

$$\Pi_S(a\sigma_u + b\sigma_v) = \Pi_\sigma(a, b) = A^T \mathcal{F}_\Pi A = A^T (\lambda \mathcal{F}_I A) = \lambda A^T \mathcal{F}_I A = \lambda.$$

Está assim demonstrado o seguinte resultado.

Proposição 2.9. *As curvaturas principais de $S = \sigma(U)$ em P são os valores próprios da matriz $\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_\Pi$; e as direcções principais são as dos vectores cujas coordenadas na base (σ_u, σ_v) constituem vectores próprios da mesma matriz.*

Exemplo 2.21. Considere a parametrização local

$$\begin{aligned}\sigma :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u, \sin u, v)\end{aligned}$$

do cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Os coeficientes da sua primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned}E &= (-\sin u, \cos u, 0) \cdot (-\sin u, \cos u, 0) = 1, \\ F &= (-\sin u, \cos u, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0, \quad G = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1,\end{aligned}$$

o vector normal unitário é

$$N = \frac{(-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)}{\|(-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)\|} = (\cos u, \sin u, 0)$$

e os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned}e &= (-\cos u, -\sin u, 0) \cdot (\cos u, \sin u, 0) = -1, \\ f &= (0, 0, 0) \cdot N = 0, \quad g = (0, 0, 0) \cdot N = 0;\end{aligned}$$

logo, temos

$$\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obviamente, os valores próprios desta matriz são -1 e 0 , e $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são vectores próprios associados (respectivamente a -1 e a 0); assim, as curvaturas principais de $S^1 \times \mathbb{R}$, com a orientação dada por N , num ponto $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, são

$$\kappa_1 = -1 \quad \text{e} \quad \kappa_2 = 0$$

e as direcções principais são, respectivamente, as direcções dos vectores

$$\mathbf{t}_1 = 1(-\sin u, \cos u, 0) + 0(0, 0, 1) = (-\sin u, \cos u, 0)$$

e

$$\mathbf{t}_2 = 0(-\sin u, \cos u, 0) + 1(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

(o cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ tem curvatura normal nula na direcção “vertical”, i. e., da terceira coordenada; a outra direcção principal é “horizontal” — e obviamente tangente ao cilindro — e nesta a curvatura normal é, em módulo, igual à curvatura de \mathbb{S}^1 ; o sinal – vem do facto de esta parametrização induzir um vector N “virado para fora”).

A matriz $\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}$, sendo uma matriz real 2×2 , pode (à partida) ter 0, 1 ou 2 valores próprios reais; mas como já sabemos que a curvatura normal tem um máximo e um mínimo, fica excluída a hipótese de $\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}$ não ter valores próprios reais. No caso de ter apenas um valor próprio, concluímos que esse é o valor máximo e simultaneamente mínimo da curvatura normal — isto é, nesse caso a curvatura normal é igual para todas as direcções, e assim toda a direcção é direcção principal; este caso merece um nome especial.

Definição 2.24. Um ponto $P \in S$ para o qual todas as curvaturas normais são iguais diz-se um *ponto umbílico*.

Por exemplo, todo o ponto de um plano, ou todo o ponto de uma esfera, é umbílico (exercício).

No caso de $\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}$ ter dois valores próprios distintos, teremos então duas curvaturas principais, κ_1 e κ_2 , associadas a duas direcções principais, que podem ser representadas por dois vectores unitários $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{T}_S(P)$.

Proposição 2.10. *Seja P um ponto não umbílico de S . Então as direcções principais de S em P são ortogonais.*

Demonstração. Sejam κ_1, κ_2 as curvaturas principais de S em P e

$$\mathbf{t}_1 = a_1\sigma_u + b_1\sigma_v, \quad \mathbf{t}_2 = a_2\sigma_u + b_2\sigma_v$$

vectores representativos das direcções principais; assim, escrevendo $T_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ e $T_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ temos

$$\mathcal{F}_{II}T_1 = \kappa_1\mathcal{F}_IT_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{II}T_2 = \kappa_2\mathcal{F}_IT_2.$$

Como

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 &= (a_1\sigma_u + b_1\sigma_v) \cdot (a_2\sigma_u + b_2\sigma_v) \\ &= Ea_1a_2 + F(a_1b_2 + a_2b_1) + Gb_1b_2 = T_1^T \mathcal{F}_1 T_2\end{aligned}$$

(e, analogamente, $\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_1 = T_2^T \mathcal{F}_1 T_1$) vem que

$$T_2^T \mathcal{F}_1 T_1 = \kappa_1 T_2^T \mathcal{F}_1 T_1 = \kappa_1(\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_1) \quad \text{e} \quad T_1^T \mathcal{F}_1 T_2 = \kappa_2 T_1^T \mathcal{F}_1 T_2 = \kappa_2(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2).$$

Mas tanto $T_2^T \mathcal{F}_1 T_1$, sendo uma matriz 1×1 (um número real), como \mathcal{F}_1 são matrizes simétricas, logo são iguais às suas transpostas, e portanto

$$T_2^T \mathcal{F}_1 T_1 = T_1^T \mathcal{F}_1 T_2 = T_1^T \mathcal{F}_1 T_2,$$

ou seja,

$$\kappa_1(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2) = \kappa_1(\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_1) = \kappa_2(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2),$$

donde, se $\kappa_1 \neq \kappa_2$, vem que $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = 0$. □

Vamos agora definir duas novas medidas da curvatura de uma superfície num ponto.

Definição 2.25. Sejam κ_1, κ_2 as curvaturas principais de S em P . A *curvatura gaussiana* de S em P é

$$K = \kappa_1 \kappa_2$$

e a *curvatura média* de S em P é

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Se invertermos a orientação de S os sinais de ambas as curvaturas principais mudam, de forma que a curvatura média também muda de sinal, mas a curvatura gaussiana não. Assim, a curvatura gaussiana é independente da orientação, e está mesmo definida em superfícies não orientáveis.

Repare também que

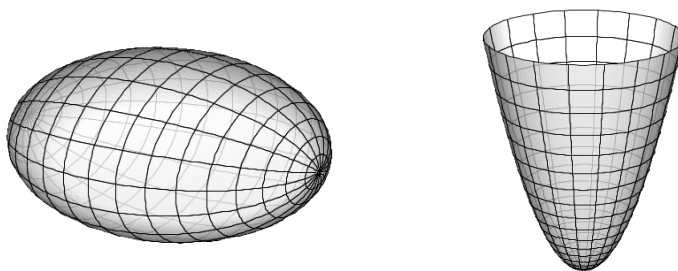
$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \det(\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}) = \frac{\det \mathcal{F}_{II}}{\det \mathcal{F}_I} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

A curvatura gaussiana tem diversas propriedades muito interessantes. Para já vamos usá-la para classificar os pontos de uma superfície:

Definição 2.26. Sejam K e H as curvaturas gaussiana e média de S em P , respectivamente. O ponto P diz-se

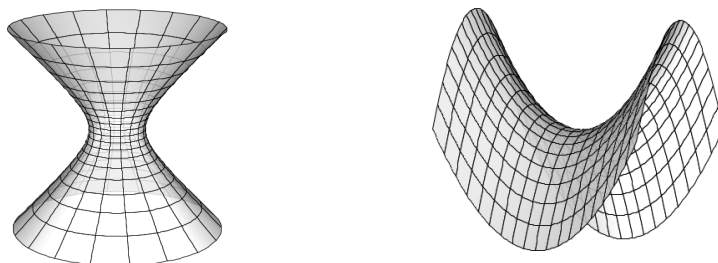
- um *ponto elíptico* se $K > 0$;
- um *ponto hiperbólico* se $K < 0$;
- um *ponto parabólico* se $K = 0$ e $H \neq 0$;
- um *ponto planar* se $K = H = 0$.

P é elíptico se as curvaturas principais forem ambas positivas ou ambas negativas — o que significa que todas as secções normais por P têm o mesmo vector normal principal, ou ainda que todas as secções normais por P são convexas para o “mesmo lado” do plano tangente (v. pág. 22); exemplos de pontos elípticos são um ponto qualquer de um elipsóide (abaixo à esquerda) e um ponto qualquer de um parabolóide elíptico (abaixo à direita).

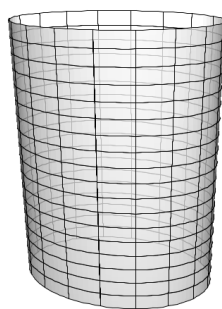


P é hiperbólico se uma curvatura principal for positiva e outra negativa — o que significa que há secções normais por P com vectores normais principais com sentidos opostos, ou ainda que algumas secções normais são convexas para um “lado” e outras para o outro; exemplos de pontos hiperbólicos são

um ponto qualquer de um hiperbolóide de uma folha (abaixo à esquerda) e um ponto qualquer de um parabolóide hiperbólico (abaixo à direita).

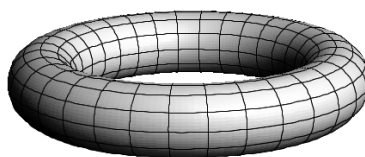


P é parabólico se uma curvatura principal (e só uma) for nula — o que significa que uma (e uma só) secção normal por P não tem vector normal principal; o exemplo típico é um ponto qualquer de um cilindro circular.



P é planar se ambas as curvaturas principais forem nulas — o que significa que nenhuma secção normal por P tem vector normal principal; o exemplo óbvio é um ponto qualquer de um plano.²⁵

Num toro há pontos elípticos, pontos hiperbólicos e pontos parabólicos.



²⁵Mas atenção: um ponto pode ser planar sem que a superfície seja (nem sequer localmente) plana — ou seja, sem que a superfície (nem sequer numa vizinhança do ponto) esteja contida num plano: por exemplo, no cilindro de equação $y = x^4$, que pode ser parametrizado por $\sigma(u, v) = (u, u^4, v)$, os pontos da recta $x = 0, y = 0$ são planares (exercício).

2.6 Teorema Egrégio de Gauss

Vamos verificar que a curvatura gaussiana pode ser calculada a partir dos coeficientes da primeira forma fundamental. Este facto pode (deve) parecer surpreendente, já que o cálculo das curvaturas normais (e em particular das curvaturas principais) necessita da *segunda* forma fundamental.

Sejam $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de superfície, $S = \sigma(U)$ e $P = \sigma(u_0, v_0)$ um ponto de S .

Nesta secção, para poupar um pouco a notação, vamos considerar a aplicação de Gauss com o mesmo domínio da parametrização σ , e não com domínio na porção de superfície S . Isto é, vamos escrever $N(u, v)$ em vez de $N(\sigma(u, v))$ e N em vez de $N \circ \sigma$. Então, como N é sempre unitário, é ortogonal às suas derivadas N_u, N_v , o que significa que (calculadas em (u_0, v_0)) N_u e N_v pertencem ao plano $\mathcal{T}_S(P)$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\sigma_u + a_{21}\sigma_v \\ N_v &= a_{12}\sigma_u + a_{22}\sigma_v \end{aligned} \tag{2}$$

Fazendo os produtos internos destas igualdades por σ_u e σ_v , e recordando (pág. 71) que $N_u \cdot \sigma_u = -N \cdot \sigma_{uu} = -e$ e analogamente $N_u \cdot \sigma_v = N_v \cdot \sigma_u = -f$ e $N_v \cdot \sigma_v = -g$, obtemos

$$\begin{aligned} e &= -a_{11}E - a_{21}F & f &= -a_{11}F - a_{21}G \\ f &= -a_{12}E - a_{22}F & g &= -a_{12}F - a_{22}G \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

Por outro lado, repare que, em cada ponto $\sigma(u, v)$, o terno (σ_u, σ_v, N) forma uma base de \mathbb{R}^3 . Vamos escrever as derivadas de segunda ordem de σ nessa base.

$$\begin{aligned}\sigma_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + \lambda_1 N \\ \sigma_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + \lambda_2 N \\ \sigma_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \sigma_u + \Gamma_{21}^2 \sigma_v + \lambda_3 N \\ \sigma_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \sigma_u + \Gamma_{22}^2 \sigma_v + \lambda_4 N\end{aligned}$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k chamam-se *símbolos de Christoffel*.

Por σ ser C^∞ , temos $\sigma_{uv} = \sigma_{vu}$ e portanto $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ e $\lambda_2 = \lambda_3$. Além disso, se fizermos o produto interno de cada umas das expressões acima por N , notando que $N \cdot \sigma_u = 0$, $N \cdot \sigma_v = 0$ e $N \cdot N = 1$, vemos que $e = \lambda_1$, $f = \lambda_2 = \lambda_3$ e $g = \lambda_4$, de forma que

$$\begin{aligned}\sigma_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + eN \\ \sigma_{uv} &= \sigma_{vu} = \Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + fN \\ \sigma_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \sigma_u + \Gamma_{22}^2 \sigma_v + gN\end{aligned}\tag{4}$$

Repare agora que

$$\begin{aligned}E_u &= \frac{\partial(\sigma_u \cdot \sigma_u)}{\partial u} = 2(\sigma_{uu} \cdot \sigma_u) \\ F_u &= \frac{\partial(\sigma_u \cdot \sigma_v)}{\partial u} = \sigma_{uu} \cdot \sigma_v + \sigma_u \cdot \sigma_{vu} \\ E_v &= \frac{\partial(\sigma_u \cdot \sigma_u)}{\partial v} = 2(\sigma_{uv} \cdot \sigma_u)\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E_u &= \sigma_{uu} \cdot \sigma_u = (\Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + eN) \cdot \sigma_u = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v &= \sigma_{uu} \cdot \sigma_v = (\Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + eN) \cdot \sigma_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G\end{aligned}$$

Ora, o sistema linear

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

nas incógnitas $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ tem determinante $EG - F^2 > 0$ logo, resolvendo-o, encontramos fórmulas que dão Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 em função de E, F, G, E_u, F_u e E_v .

Analogamente, podemos derivar os sistemas

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

cada um igualmente com determinante $EG - F^2 > 0$.

Concluimos que os símbolos de Christoffel podem ser calculados usando apenas os coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas.

Mais uma vez por σ ser C^∞ , temos

$$(\sigma_{uu})_v = (\sigma_{uv})_u,$$

donde, usando as duas primeiras equações de (4),

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{11}^1)_v \sigma_u + \Gamma_{11}^1 \sigma_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v \sigma_v + \Gamma_{11}^2 \sigma_{vv} + e_v N + e N_v = \\ & = (\Gamma_{12}^1)_u \sigma_u + \Gamma_{12}^1 \sigma_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u \sigma_v + \Gamma_{12}^2 \sigma_{vu} + f_u N + f N_u. \end{aligned}$$

Usando agora (2) e (4) podemos escrever os dois lados desta equação como combinações lineares de σ_u, σ_v e N ; considerando apenas os coeficientes de σ_u , temos

$$(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e a_{12} = (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + f a_{11}$$

Mas de (3) tiramos

$$\begin{aligned} e a_{12} - f a_{11} &= -\frac{1}{EG - F^2} (efG - egF - feG + f^2F) = F \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= FK \end{aligned}$$

e portanto

$$K = \frac{(\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{11}^1)_v - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1}{F}.$$

Esta fórmula não se destina aqui a ser efectivamente utilizada, mas sim a mostrar que a curvatura gaussiana pode ser calculada usando apenas os símbolos de Christoffel (e duas das suas derivadas) e um dos coeficientes da primeira forma fundamental — e portanto, em última análise, usando apenas os coeficientes da primeira forma fundamental. Combinando esta observação com a proposição 2.7, fica provado o Teorema Egrégio de Gauss:²⁶

Teorema 2.11 (Teorema Egrégio de Gauss). *A curvatura gaussiana é invariante por isometrias locais.*

Ou seja, se $f : S_1 \rightarrow S_2$ for uma isometria local, a curvatura gaussiana de S_1 em P é igual à curvatura gaussiana de S_2 em $f(P)$.²⁷

Exemplo 2.22. Qualquer plano tem curvatura gaussiana 0 em todos os pontos; qualquer esfera de raio r tem curvatura gaussiana $1/r^2$ em todos os pontos (exercício). Podemos concluir que não existe nenhuma isometria local entre um plano e uma esfera (ou entre qualquer parte de um plano e qualquer parte de uma esfera).

Uma consequência importante deste exemplo é a impossibilidade de construir um mapa plano perfeito (isto é, com uma escala uniforme). Se existisse um mapa perfeito de alguma região da Terra, digamos a uma escala $1 : q$, teríamos um difeomorfismo de uma parte de uma (quase-)esfera numa parte de um plano M que dividiria todas as distâncias por q ; colocando a origem das coordenadas nalgum ponto de M e compondo esse difeomorfismo com a aplicação $\mathbf{w} \mapsto q\mathbf{w}$ em M , teríamos uma isometria; o que é impossível.

²⁶“Egrégio” significa distinto, notável, admirável. Carl Friedrich Gauss (1777–1855) descobriu e provou este teorema num dos textos mais importantes da história da geometria diferencial: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, publicado em 1828. Nesse texto, em latim, classificou este teorema como “egregium”, e assim ficou conhecido: em livros ingleses e franceses é chamado “theorema egregium” (assim mesmo, em latim).

²⁷O recíproco não é verdadeiro: há exemplos de funções $f : S_1 \rightarrow S_2$ que preservam a curvatura gaussiana sem que S_1 e S_2 sejam localmente isométricas.

Quanto a outras propriedades métricas: há mapas que reproduzem fielmente as áreas (mas distorcem as formas das regiões); e há mapas que reproduzem fielmente as amplitudes dos ângulos (mas exageram as áreas de certas regiões — tipicamente as regiões afastadas do Equador). No entanto é possível provar que uma função que preserva áreas e ângulos é necessariamente uma isometria, donde se conclui que nenhum mapa pode reproduzir fielmente áreas e ângulos.

2.7 Geodésicas

Nesta última secção vamos apresentar brevemente um tipo de curva que deve cumprir em cada superfície mais ou menos o mesmo papel que as rectas (e semi-rectas, e segmentos de recta) cumprem nos planos.²⁸

Já vimos que as rectas são as curvas com curvatura nula. Vamos examinar a curvatura de uma curva qualquer numa superfície, com vista a caracterizar as curvas que, num certo sentido, têm curvatura mínima — de maneira que a sua curvatura se reduz à que é induzida pela curvatura da superfície.

Sejam $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de superfície e $\gamma : I \rightarrow \sigma(U)$ uma parametrização por comprimento de arco duma curva em $S = \sigma(U)$; recordemos que a curvatura dessa curva será $\kappa = \|\gamma''\|$. Em cada ponto $\sigma(u_0, v_0) = \gamma(s_0)$, o vector γ' , unitário, será tangente à superfície e o vector N , também unitário, será normal à superfície; assim, o terno

$$(\gamma', N, \gamma' \times N)$$

formará uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 . Como γ' é constante unitário, será ortogonal a γ'' e portanto este será nulo ou combinação linear apenas dos dois outros elementos dessa base:

$$\gamma'' = a N + b (\gamma' \times N).$$

Vamos calcular o coeficiente a : por um lado, $\gamma'' \cdot N = a + 0$; por outro, escre-

²⁸No que se segue, onde estiver “rectas” entenda-se “curvas cujos traços são rectas, semi-rectas ou segmentos de recta”.

vendo $\gamma(s) = \sigma(u(s), v(s))$, temos

$$\begin{aligned}\gamma'' \cdot N &= (\sigma_{uu}u'^2 + \sigma_{uv}u'v' + \sigma_u u'' + \sigma_{vu}u'v' + \sigma_{vv}v'^2 + \sigma_v v'') \cdot N \\ &= eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 + 0 + 0 \\ &= \Pi(\sigma_u u' + \sigma_v v') \\ &= \kappa_n(\gamma').\end{aligned}$$

Ou seja, o coeficiente de N é a curvatura normal da superfície segundo a direcção tangente à curva. Duas quaisquer curvas na mesma superfície que passem no mesmo ponto com a mesma tangente terão essa componente igual.

Ao coeficiente de $\gamma' \times N$, que é

$$\kappa_g = \gamma'' \cdot (\gamma' \times N),$$

chamamos *curvatura geodésica* da curva parametrizada por γ .

Assim, temos

$$\gamma'' = \kappa_n N + \kappa_g (\gamma' \times N)$$

e a curvatura da curva parametrizada por γ é

$$\kappa = \sqrt{\kappa_n^2 + \kappa_g^2}.$$

A curvatura normal κ_n é própria da superfície e, por assim dizer, inevitável; portanto, o mínimo da curvatura, numa dada direcção, é atingido quando $\kappa_g = 0$.

Definição 2.27. Uma *geodésica* é uma curva cuja curvatura geodésica é constante nula.

Informalmente, podemos pensar numa geodésica como uma curva que se curva na medida em que a superfície onde está a obriga a curvar — e não mais.

Exemplo 2.23. Num plano, como as curvaturas normais são sempre nulas, $\kappa_g = 0$ é equivalente a $\kappa = 0$. Isto é, as geodésicas dos planos são as suas rectas.

Exemplo 2.24. Qualquer recta contida numa superfície é uma geodésica dessa superfície, pois para ser $\kappa = 0$ tem de ser $\kappa_n = \kappa_g = 0$.

Proposição 2.12. *Sejam S uma superfície orientada e γ uma parametrização por comprimento de arco duma curva em S . As condições seguintes são equivalentes:*

1. *A curva parametrizada por γ é uma geodésica.*
2. *Em cada ponto da curva, ou $\gamma'' = \mathbf{0}$ ou γ'' e o vector normal principal \mathbf{n} são colineares com o vector normal unitário N .*
3. *Em cada ponto da curva, ou o plano osculador não existe ou é ortogonal ao plano tangente a S .*

Demonstração. (1. \Leftrightarrow 2.) Dizer que γ parametriza uma geodésica é o mesmo que dizer que $\kappa_g = 0$, ou seja, que $\gamma'' = \kappa_n N$; e, sendo γ uma parametrização por comprimento de arco, \mathbf{n} é colinear com γ'' (desde que $\gamma'' \neq \mathbf{0}$).

(2. \Rightarrow 3.) Em cada $P \in S$, N é ortogonal a $\mathcal{T}_S(P)$ logo, se γ'' é colinear com N , então o plano osculador $P + \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = P + \langle \gamma', \gamma'' \rangle = P + \langle \gamma', N \rangle$ é ortogonal a $\mathcal{T}_S(P)$.

(3. \Rightarrow 2.) Se o plano osculador $P + \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle$ é ortogonal ao plano tangente, como N é também ortogonal ao plano tangente, temos $N \in \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle$ e, como $N \perp \mathbf{t}$ e $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}$, tem de ser $N \parallel \mathbf{n}$; e mais uma vez, sendo γ uma parametrização por comprimento de arco, \mathbf{n} é colinear com γ'' . \square

Em particular, uma curva plana (que não seja uma recta) numa superfície S é uma geodésica de S se e só se o plano que contém o seu traço for ortogonal ao plano tangente à superfície em todo o ponto da curva.

Exemplo 2.25. Em \mathbb{S}^2 , as circunferências cujo centro é a origem são geodésicas: basta notar que $N(x, y, z) = \pm(x, y, z)$ (o sinal depende da orientação) e que portanto o plano tangente em (x, y, z) é ortogonal ao plano que contém uma dessas circunferências e o seu centro $P \mp N(P)$. Veremos mais abaixo que estas circunferências (e os seus arcos) são as únicas geodésicas de \mathbb{S}^2 .

As outras circunferências (como os “paralelos” ao “equador”) não são geodésicas.

Exemplo 2.26. Em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ as geratrizes (rectas verticais) são geodésicas (por serem rectas); e as circunferências (secções horizontais) são também geodésicas (N é sempre horizontal).

Outras secções planas não são geodésicas.

No entanto, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ tem mais geodésicas (que não são secções planas).

Proposição 2.13. *Sejam $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de superfície e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização por comprimento de arco duma curva em $S = \sigma(U)$, com $\gamma(s) = \sigma(u(s), v(s))$. Então γ parametriza uma geodésica se e só se as funções $s \mapsto u(s)$ e $s \mapsto v(s)$ satisfazem as seguintes equações:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(Eu' + Fv') &= \frac{1}{2}(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2) \\ \frac{d}{ds}(Fu' + Gv') &= \frac{1}{2}(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2).\end{aligned}$$

Demonstração. Como $\mathcal{T}_S(P) = P + \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$, γ parametriza uma geodésica se e só se

$$\gamma'' \cdot \sigma_u = 0 \quad \text{e} \quad \gamma'' \cdot \sigma_v = 0.$$

Ora, $\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$, logo $\gamma'' = \frac{d}{ds}(\sigma_u u' + \sigma_v v')$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}((\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \sigma_u) &= \frac{d}{ds}(\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \sigma_u + (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \frac{d\sigma_u}{ds} \\ &= \gamma'' \cdot \sigma_u + (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot (\sigma_{uu} u' + \sigma_{uv} v'),\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{ds}(Eu' + Fv') = \gamma'' \cdot \sigma_u + \frac{1}{2}(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2)$$

e portanto

$$\gamma'' \cdot \sigma_u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{ds}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2).$$

Analogamente,

$$\gamma'' \cdot \sigma_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{ds}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2). \quad \square$$

Repare que nas equações desta proposição a superfície é representada apenas pelos coeficientes da primeira forma fundamental. Podemos aplicar a proposição 2.7 e deduzir a seguinte importante consequência:

Corolário 2.14. *As geodésicas são invariantes por isometrias locais.*

Isto é, se $f : S_1 \rightarrow S_2$ for uma isometria local e γ uma parametrização de uma geodésica em S_1 , então $f \circ \gamma$ será uma parametrização de uma geodésica em S_2 .

Exemplo 2.27. Como a função f do exemplo 2.18 (pág. 63) é uma isometria local (v. exemplo 2.20, pág. 68) e as geodésicas dos planos são as suas rectas, as imagens dessas rectas por f são geodésicas de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. É fácil verificar que essas imagens são as geratrizes do cilindro, as circunferências (secções horizontais do cilindro) e as hélices contidas no cilindro.

As equações da proposição 2.13 são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem em u e v .²⁹ Um resultado da teoria das equações diferenciais ordinárias (sobre existência e unicidade de soluções) permite-nos concluir outra consequência importante:

Corolário 2.15. *Sejam S uma superfície, $P \in S$ e $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_S(P)$ tal que $\|\mathbf{w}\| = 1$. Então existe uma única geodésica de S que passa em P e cujo vector tangente unitário em P é \mathbf{w} .³⁰*

²⁹Essas equações podem também ser escritas na forma

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 &= 0 \end{aligned}$$

(envolvendo os símbolos de Christoffel) que torna mais visível a sua estrutura como equações diferenciais em u e v .

³⁰Única, isto é, a menos de prolongamentos ou segmentos: qualquer segmento de geodésica é ainda uma geodésica e uma geodésica que não seja maximal pode ser prolongada.

Este corolário permite-nos concluir que as geodésicas que encontramos acima de \mathbb{S}^2 (exemplo 2.25) e de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (exemplo 2.27) são as únicas geodésicas dessas superfícies.

Para terminar, vamos enunciar alguns resultados que relacionam geodésicas com curvas de comprimento mínimo (isto é, curvas com extremos $A, B \in S$ e cujo comprimento é o mínimo dos comprimentos das curvas em S com extremos A, B):

1. Considerando todas as curvas numa superfície S (conexa por arcos) com extremos A, B , existe o ínfimo dos comprimentos dessas curvas, que podemos chamar a distância entre A e B em S (basta notar que esses comprimentos formam um subconjunto não vazio de \mathbb{R}_0^+).
2. Não existe necessariamente um mínimo desses comprimentos (contra-exemplo: $S = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $A = (-1, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$).
3. Se existir uma curva de comprimento mínimo entre A e B , essa curva será uma geodésica (este é o resultado central destes quatro, mas terá de ficar aqui sem demonstração³¹).
4. Nem todas as geodésicas com extremos são curvas de comprimento mínimo (contra-exemplo: em \mathbb{S}^2 , os pontos $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ dividem a circunferência $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ em dois arcos, um com comprimento $\frac{\pi}{2}$ e outro com comprimento $\frac{3\pi}{2}$; ambos são geodésicas).

³¹Uma demonstração pode ser vista em [A Pressley, 1.^a ed., sec. 8.4; 2.^a ed., sec. 9.4]

Referências

[PV Araújo] Paulo Ventura Araújo, *Geometria Diferencial*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.

[C Bär] Christian Bär, *Elementary Differential Geometry*, Cambridge UP, 2010.

[MP Carmo] Manfredo P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

[FR Dias Agudo] F. R. Dias Agudo, *Análise Real*, vol. II, Escolar Editora, 1990.

[A Pressley] Andrew Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, 2001.

As figuras das páginas 41, 42, 44, 53, 73 e 74 foram desenhadas com o programa *Geogebra*.

As superfícies das páginas 57, 79 e 80 foram desenhadas com o programa *3D-XplorMath-J*.

As outras figuras foram desenhadas com comandos de PSTricks em \LaTeX (com alguma ajuda do *Geogebra*).

Conteúdo

1	Curvas	1
1.0	Continuidade e derivação de funções vectoriais	1
1.1	Definições iniciais	2
1.2	Tangentes	9
1.3	Comprimento de arco	10
1.4	Curvatura	14
1.5	Triedro de Frenet; torção	20
1.6	Movimentos rígidos; teorema fundamental da teoria local das curvas	31
	Apêndice (demonstração da proposição 1.1)	36
2	Superfícies	39
2.0	Homeomorfismos	39
2.1	Definições iniciais	42
2.2	Espaço tangente; diferenciabilidade; orientação	50
2.3	Primeira forma fundamental; comprimento e área	58
2.4	Difeomorfismos e isometrias	63
2.5	Segunda forma fundamental; curvatura	69
2.6	Teorema Egrégio de Gauss	81
2.7	Geodésicas	85